ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΕΜ

Χειμερινό εξάμηνο 2017-18

ΜΕΜ231-ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ X

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Οι παρακάτω ασκήσεις αφορούν στην τοπολογία πηλίκο. Από τον Crossley, κοιτάξτε τα παραδείγματα του Κεφαλαίου 5.

1. Έστω $\pi : \mathbb{R} \to X = \{a, b, c\}$ που ορίζεται ως εξής

$$\pi(x) = \begin{cases} a & x > 0, \\ b & x = 0, \\ c & x < 0. \end{cases}$$

Βρείτε την τοπολογία πηλίκο στο X.

2. Στην άσκηση αυτή, ένα τρίγωνο $\triangle ABC$ θεωρείται ως η ένωση του εσωτερικού του με τις πλευρές του. Επιπλόν η ταύτιση όταν λέμε ότι ταυτίζουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα AB και CD, εννοούμε ότι βρίσκουμε την 1–1 και επί γραμμική απεικόνιση που απεικονίζει το A στο C και το B στο D. Χωρ·ις μεγάλη αυστηρότητα, εξηγήστε γεωμετρικά τί είδους σχήμα παίρνετε όταν

- στο $[0, 2]$ ταυτίζετε τα σημεία $0, 1$ και 2,
- στην ξένη ένωση τριγώνων $\triangle ABC$ και $\triangle A'B'C'$ ταυτίζετε τις πλευρές ανά ζεύγη (δηλαδή, την AB με την $A'B'$ κ.λπ.),
- σε τρίγωνο $\triangle ABC$ ταυτίζετε τις CA και AB.

Υπόδειξη: το τελευταίο σχήμα είναι το τρελλό κωνικό καπελλάκι που υποχρεώνονταν να φορέσουν οι μαθητές δημοτικού στα αγγλικά σχολεία, όταν έκαναν αταξίες. Για να το δείτε, πιάστε ψαλίδι και χαρτί και κόψτε το τρίγωνο κατά μήκος της διαμέσου του AD. Φέρτε τώρα τα τρίγωνα που προκύπτουν σε κατάλληλη θέση.

3. Αυτήν τήν άσκηση καλό είναι να την κάνετε μία φορά ούτως ώστε να πειστείτε ότι και οι παρόμοιες βγαίνουν με τον ίδιο τρόπο. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της κατασκευής της λωρίδας του Möbius, δηλαδή, δείξτε ότι η σχέση ταύτισης είναι σχέση ισοδυναμίας και προσδιορίστε επακριβώς τις κλάσεις ισοδυναμίας. (Μην απογοητευτείτε!)

4. Έστω η $f : [0, 2\pi] \to S^1$ που ορίζεται από την

$$f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Δείξτε ότι η f δεν είναι ανοικτή, άρα δεν μπορεί να είναι απεικόνιση πηλίκο. Για να το κάνετε αυτό, παρατηρήστε ότι το $[0, \pi)$ είναι ανοικτό του $[0, 2\pi]$ ενώ η εικόνα του δεν είναι ανοικτό του S^1. Κάνετε σχήμα για να βοηθηθείτε. Παρατηρήστε επίσης ότι η άσκηση αυτή σας λέει και άλλα, όπως ότι:

- Η f δεν είναι ομοιομορφισμός.
- Η f δεν είναι εμφύτευση του $[0, 2\pi]$ στο S^1.

5. Έστω η εξής σχέση στο $[0,1]$:

$$x \sim y \iff x, y \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \text{ ή } x, y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$$

Δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και αποδείξτε ότι ο προκύπτων χώρος πηλίκο είναι ο χώρος με δύο σημεία εφοδιασμένος με τη μη διακριτή τοπολογία. Έχετε εδώ υπόψη ότι ο $[0,1]/\sim$ δεν είναι Hausdorff.

6. Αποδείξτε ότι η σύνθεση δύο απεικονίσεων πηλίκο είναι απεικόνιση πηλίκο.

7. Αποδείξτε ότι η $f : X \to Y$ είναι απεικόνιση πηλίκο αν και μόνο αν

$$V \subset Y \text{ κλειστό του } Y \iff f^{-1}(V) \text{ κλειστό του } X.$$

8. Ορίζουμε την εξής σχέση στο $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \sim (x', y') \iff x - x' \text{ και } y - y' \text{ είναι ακέραια πολλαπλάσια του } 2\pi.$$

Αποδείξτε ότι ο χώρος πηλίκο είναι ομοιομορφικός με τον τόρο $\mathbb{T}$. (Αυτή η άσκηση μας λέει ουσιαστκά ότι ο τόρος είναι ο *χώρος τροχιών* της δράσης της ομάδας $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ στο $\mathbb{R}^2$:

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \ni ((n,m),(x,y)) \mapsto (x + 2n\pi, y + 2m\pi) \in \mathbb{R}^2.)$$