

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΕΜ

Χειμερινό εξάμηνο 2017-18

**ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ,  
ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, 02/12/2017**

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Όνοματεπώνυμο:

Α.Μ:

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Υπάρχουν 70 μονάδες. Βάση το 30, άριστα το 60. Αν  $x$  είναι ο αριθμός των μονάδων επιτυχίας σας, τότε  $y = (1/15)x$  είναι οι μονάδες σας από τον συνολικό τελικό βαθμό. (Κάποιος/α που γράφει 30 παίρνει 2 μονάδες του τελικού βαθμού, κάποιος/α που γράφει 60 παίρνει 4 μονάδες του τελικού βαθμού και κάποιος/α που γράφει 70 παίρνει  $4,\bar{6}$  μονάδες του τελικού βαθμού.)
- Γράψτε τις λύσεις πρώτα στο πρόχειρο φύλλο και κατόπιν μεταφέρετέ τις στο φυλλάδιο αυτό. Εάν δεν σας παίρνει ο χώρος για την απάντηση κάποιου ερωτήματος στο ανά χείρας φυλλάδιο, ζητήστε επιπλέον φύλλο όπου θα αναγράφεται καθαρά το ερώτημα που απαντάτε.
- Για την απάντηση των ερωτημάτων μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιοδήποτε αποτέλεσμα που διδάχθηκε στην τάξη, αρκεί να είναι στοιχειωδέστερο αυτού που σας ζητείται να απαντήσετε.
- Παραδίδετε μόνο το φυλλάδιο αυτό.
- Τα κινητά σας τηλέφωνα πρέπει να είναι κλειστά.
- **Διάρκεια: 150 λεπτά.**

**Θέμα Ι**

Έστω  $X$  σύνολο,  $\{\mathcal{T}_\alpha, \alpha \in A\}$  οικογένεια τοπολογιών στον  $X$  με δείκτες από ένα σύνολο  $A$  και  $\mathcal{B}$  συλλογή υποσυνόλων του  $X$ .

α) (3) Δείξτε ότι η  $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$  είναι τοπολογία στον  $X$ .

β) (2) Πότε η  $\mathcal{B}$  λέγεται βάση του  $X$ ;

γ) (5) Δεδομένου ότι η  $\mathcal{B}$  είναι βάση, αποδείξτε ότι η τοπολογία του  $X$  που παράγεται τη  $\mathcal{B}$  είναι όντως τοπολογία.

δ) (5) Έστω ότι για τη βάση  $\mathcal{B}$  ισχύει:  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_\alpha$ , για κάθε  $\alpha \in A$ . Δείξτε ότι η παραγόμενη από την  $\mathcal{B}$  τοπολογία στον  $X$  περιέχεται στην  $\bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$ .

**Θέμα II**

Έστω  $X, Y$  τοπολογικοί χώροι και  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ ,  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  οι προβολές στους  $X$ ,  $Y$ , αντίστοιχα. Θεωρήστε τις ακόλουθες δύο προτάσεις:

- Εάν  $W$  είναι ανοιχτό του  $X \times Y$ , τότε τα  $\pi_X(W)$  και  $\pi_Y(W)$  είναι ανοιχτά των  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα.
- Εάν τα  $\pi_X(W)$  και  $\pi_Y(W)$  είναι ανοιχτά των  $X$  και  $Y$  αντίστοιχα, τότε το  $W$  είναι ανοιχτό του  $X \times Y$ .

α) **(3)** Αποδείξτε την πρόταση που αληθεύει.

β) **(2)** Βρείτε αντιπαράδειγμα για την πρόταση που δεν αληθεύει.

γ) **(5)** Δείξτε ότι αν οι  $X, Y$  είναι Hausdorff τότε και το  $X \times Y$  είναι Hausdorff.

**Θέμα ΙΙΙ**

α) (3) Δείξτε ότι αν  $f : X \rightarrow Y$  και  $\mathcal{T}_X$  είναι η διακριτή τοπολογία, τότε η  $f$  είναι συνεχής.

β) (3) Αποδείξτε ότι αν  $f : X \rightarrow Y$  συνεχής, τότε για κάθε  $A \subset X$  ισχύει  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

γ) (4) Έστω  $f : X \rightarrow Y$  ομοιομορφισμός. Αποδείξτε ότι ο  $X$  είναι Hausdorff αν και μόνο αν ο  $Y$  είναι Hausdorff.

**Θέμα IV**

- α) (2) Έστω  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση. Πότε η  $d$  λέγεται μετρική στον  $X$ ;
- β) (4) Θεωρήστε γνωστό ότι η συλλογή όλων των ανοικτών μετρικών μπαλλών στον μετρικό χώρο  $(X, d)$  είναι βάση για μια τοπολογία στον  $X$ . Δείξτε ότι η τοπολογία αυτή είναι η μετρική τοπολογία  $\mathcal{T}_d$  του  $X$ .
- γ) (4) Αποδείξτε ότι κάθε μετριοποιήσιμος χώρος είναι Hausdorff.

**Θέμα V**

- α) **(2)** Δώστε τους ορισμούς του συνεκτικού και του συνεκτικού κατά δρόμους τοπολογικού χώρου.
- β) **(5)** Αποδείξτε ότι ο  $X$  δεν είναι συνεκτικός αν και μόνο αν υπάρχει  $f : X \rightarrow S^0$  συνεχής και επί. Εδώ,  $S^0 = \{-1, 1\}$  με τη διακριτή τοπολογία.
- γ) **(3)** Δείξτε ότι η συνεχής εικόνα συνεκτικού χώρου είναι συνεκτικός χώρος.
- δ) **(5)** Αποδείξτε ότι κάθε συνεκτικός κατά δρόμους χώρος είναι συνεκτικός και δώστε αντιπαράδειγμα για την μη ισχύ του αντιστρόφου.

**Θέμα VI**

- α) **(2)** Δώστε τον ορισμό του συμπαγούς τοπολογικού χώρου  $X$ .
- β) **(3)** Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένη ένωση συμπαγών υποχώρων ενός τοπολογικού χώρου  $X$  είναι συμπαγής.
- γ) **(5)** Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής απεικόνιση από συμπαγή χώρο σε χώρο Hausdorff είναι κλειστή.

Παρακαλώ μην γράφετε τίποτε σε αυτή τη σελίδα.

Θέμα	Μονάδες	Μονάδες επιτυχίας
I	15	
II	10	
III	10	
IV	10	
V	15	
VI	10	
Σύνολο	70	