ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Πολλοί επιστήμονες αρνούνταν να χρησιμοποιήσουν τα διανύσματα, προτιμώντας την πιο πολύπλοκη θεωρία των τετράδων (quaternions) μέχρι περίπου το 1900. Το βιβλίο που έκανε δημοφιλείς τις διανυσματικές μεθόδους ήταν η *Διανυσματική Ανάλυση* (Vector Analysis) του E.B. Wilson (ανατύπωση Dover του 1960), το οποίο βασιζόταν σε διαλέξεις του J.W. Gibbs στο Yale στα 1899 και 1900. Ο Wilson παρακολούθησε απρόθυμα τα μαθήματα του Gibbs, γιατί είχε μόλις ολοκληρώσει ένα ετήσιο μάθημα πάνω στις τετράδες στο Harvard με τον J.M. Pierce, έναν τεχνίτη της θεωρίας των τετράδων, υποχρεώθηκε όμως από κάποιον κοσμήτορα να προσθέσει το μάθημα αυτό στο πρόγραμμά του. (Για περισσότερες λεπτομέρειες, βλέπε M.J. Crowe, *A History of Vector Analysis*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, Ind., 1967.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Συμπληρώστε τις πράξεις στις Ασκήσεις 1 ώς 6.

1. $(-21, 23) - (;, 6) = (-25, ;)$

2. $3(133, -0.33, 0) + (-399, 0.99, 0) = (;, ;, ;)$

3. $(8a, -2b, 13c) = (52, 12, 11) + \frac{1}{2}(;, ;, ;)$

4. $(2, 3, 5) - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = (;, ;, ;)$

5. $800(0.03, 0, 0) = ;\mathbf{i} + ;\mathbf{j} + ;\mathbf{k}$

6. $(3, 4, 5) + (6, 2, -6) = (;, ;, ;)$

7. Ποιούς περιορισμούς πρέπει να βάλουμε στα x, y και z έτσι ώστε η τριάδα (x, y, z) να παριστάνει ένα σημείο στον άξονα y; Στον άξονα z; Στο επίπεδο xz; Στο επίπεδο yz;

8. Σχεδιάστε τα διανύσματα $\mathbf{v} = (2, 3, -6)$ και $\mathbf{w} = (-1, 1, 1)$. Στο σχήμα σας, τοποθετήστε τα $-\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, 2\mathbf{v}$ και $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

9. (a) Γενικεύστε τη γεωμετρική κατασκευή του Σχήματος 1.1.6 για να δείξετε ότι αν $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ και $\mathbf{v}_2 = (x', y', z')$, τότε $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x + x', y + y', z + z')$.

(b) Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα βασισμένο στην ομοιότητα τριγώνων, αποδείξτε ότι $\alpha\mathbf{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ όταν $\mathbf{v} = (x, y, z)$.

10. Επαναλάβετε την Άσκηση 8, παίρνοντας $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$ και $\mathbf{w} = (-2, 0, -1)$.

Στις Ασκήσεις 11 ώς 17, χρησιμοποιήστε συνολοθεωρητικό ή διανυσματικό συμβολισμό ή και τους δύο για να περιγράψετε τα σημεία που ανήκουν στα σχήματα που δίνονται, όπως κάναμε στα Παραδείγματα 4, 5 και 6.

11. Το επίπεδο που παράγεται από τα $\mathbf{v}_1 = (2, 7, 0)$ και $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 7)$.

12. Το επίπεδο που παράγεται από τα $\mathbf{v}_1 = (3, -1, 1)$ και $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 4)$.

13. Την ευθεία που περνάει από το $(-1, -1, -1)$ στη διεύθυνση του $\mathbf{j}$.

14. Την ευθεία που περνάει από το $(0, 2, 1)$ στη διεύθυνση του $2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

15. Την ευθεία που περνάει από τα $(-1, -1, -1)$ και $(1, -1, 2)$.

16. Την ευθεία που περνάει από τα $(-5, 0, 4)$ και $(6, -3, 2)$.

17. Το παραλληλόγραμμο με προσκείμενες πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{i}+3\mathbf{k}$ και $-2\mathbf{j}$.

18. Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $x = 3 + 2t, y = 7 + 8t, z = -2 + t$, δηλαδή της $\mathbf{l}(t) = (3 + 2t, 7 + 8t, -2 + t)$, με τα επίπεδα συντεταγμένων.

19. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν σημεία (x, y, z) που να ικανοποιούν την $2x - 3y + z - 2 = 0$ και να ανήκουν στην ευθεία $\mathbf{v} = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$.

20. Δείξτε ότι κάθε σημείο της ευθείας $\mathbf{v} = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$ ικανοποιεί την $5x - 3y - z - 6 = 0$.

21. Δείξτε ότι οι διάμεσοι ενός τριγώνου έχουν ένα κοινό σημείο, και ότι αυτό το σημείο χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο μέρη με λόγο 2:1.

Στις Ασκήσεις 22 ώς 24, χρησιμοποιήστε διανυσματικές μεθόδους για να περιγράψετε τα σχήματα που δίνονται:

22. Το παραλληλεπίπεδο με πλευρές $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$. (Δείτε το Σχήμα 1.3.5 για μια εικόνα του χωρίου που έχουμε στο μυαλό μας.)

23. Τα σημεία στο εσωτερικό του παραλληλογράμμου που έχει μία κορυφή στο (x_0, y_0, z_0) και τις πλευρές του που ξεκινούν απ' αυτήν την κορυφή με το ίδιο μήκος και την ίδια διεύθυνση με τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

24. Το επίπεδο που ορίζεται από τα τρία σημεία (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2).

25. Ενα πλοίο που βρίσκεται στη θέση $(1, 0)$ ενός ναυτικού χάρτη (με τον βορρά στη θετική κατεύθυνση y) "βλέπει" έναν βράχο στη θέση $(2, 4)$. Ποιό είναι το διάνυσμα που συνδέει το πλοίο με τον βράχο; Ποιά γωνία, θ, σχηματίζει αυτό το διάνυσμα με τη διεύθυνση του βορρά; (Αυτή η γωνία λέγεται *διόπτευση* του βράχου από το πλοίο.)

26. Ας υποθέσουμε ότι το πλοίο της Ασκησης 25 κατευθύνεται προς τον βορρά και ταξιδεύει με ταχύτητα 4 κόμβων σε σχέση με το νερό. Υπάρχει ένα ρεύμα 1 κόμβου κατευθυνόμενο ανατολικά. Οι μονάδες πάνω στον χάρτη είναι ναυτικά μίλια· 1 κόμβος=1 ναυτικό μίλι ανά ώρα.

(a) Αν δεν υπήρχε το ρεύμα, ποιό διάνυσμα $\mathbf{u}$ θα παρίστανε την ταχύτητα του πλοίου σε σχέση με τον βυθό της θάλασσας;

(b) Αν το πλοίο απλώς ακολουθούσε το ρεύμα, ποιό διάνυσμα $\mathbf{v}$ θα παρίστανε την ταχύτητά του σε σχέση με τον βυθό της θάλασσας;

(c) Ποιό διάνυσμα $\mathbf{w}$ παριστάνει τη συνολική ταχύτητα του πλοίου;

(d) Πού θα βρίσκεται το πλοίο μετά 1 ώρα;

(e) Πρέπει ο πλοίαρχος να αλλάξει πορεία;

(f) Τί θα γινόταν αν ο βράχος ήταν παγόβουνο;

27. Ενα αεροπλάνο βρίσκεται στη θέση $(3, 4, 5)$ το μεσημέρι και ταξιδεύει με ταχύτητα $400\mathbf{i}+500\mathbf{j}-\mathbf{k}$ χιλιόμετρα την ώρα. Ο πιλότος εντοπίζει ένα αεροδρόμιο στη θέση $(23, 29, 0)$.

(a) Ποιά χρονική στιγμή το αεροπλάνο θα περάσει ακριβώς πάνω από το αεροδρόμιο; (Υποθέτουμε ότι η Γη είναι επίπεδη και ότι το διάνυσμα $\mathbf{k}$ δείχνει προς τα πάνω.)

(b) Σε ποιό ύψος θα βρίσκεται το αεροπλάνο όταν θα περάσει πάνω από αυτό;

28. Η ταχύτητα $\mathbf{v}_1$ του ανέμου είναι 40 μίλια την ώρα (mi/h) από τα ανατολικά στα δυτικά καθώς ένα αεροπλάνο πετάει με ταχύτητα αέρος $\mathbf{v}_2$, 100 mi/h προς τον βορρά. Η ταχύτητα του αεροπλάνου σε σχέση με τη γη είναι το διανυσματικό άθροισμα $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(a) Βρείτε το $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

(b) Κάντε ένα σχήμα με κλίμακα.

29. Μία δύναμη 50 lb σχηματίζει γωνία 50° με την οριζόντια, και δείχνει προς τα δεξιά. Προσδιορίστε την οριζόντια και την κατακόρυφη συνιστώσα της. Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σε ένα σχήμα.

30. Δύο άνθρωποι τραβούν σε οριζόντια διεύθυνση δύο σχοινιά δεμένα σε μια κολώνα· η γωνία που σχηματίζουν τα σχοινιά είναι 60°. Ο Α τραβάει με δύναμη 150 lb, ενώ ο Β τραβάει με δύναμη 110 lb.

(a) Η συνολική δύναμη είναι το άθροισμα των δύο δυνάμεων σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων. Κάντε ένα σχήμα που να παριστάνει γραφικά τις τρεις δυνάμεις.

(b) Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία, βρείτε τύπους για τις συντεταγμένες των δύο δυνάμεων, σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων. Εκτελέστε την αλγεβρική πρόσθεση και βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η συνισταμένη δύναμη με το σχοινί του Α.

31. Μια μάζα ενός κιλού (1 kg) που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, είναι κρεμασμένη από σχοινιά δεμένα στα σημεία $(1, 1, 1)$ και $(-1, -1, 1)$. Αν η δύναμη της βαρύτητας έχει την κατεύθυνση του διανύσματος $-\mathbf{k}$, ποιό είναι το διάνυσμα που περιγράφει τη δύναμη (τάση) κατά μήκος καθενός από τα σχοινιά; [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιήστε τη συμμετρία του προβλήματος. Μια μάζα 1 kg ζυγίζει 9.8 newtons (N).]

32. Γράψτε τη χημική εξίσωση $CO+H_2O=H_2+CO_2$ σαν ισότητα διατεταγμένων τριάδων (C, O, H) και παραστήστε την σχηματικά με ένα διανυσματικό διάγραμμα στον χώρο.

33. (a) Γράψτε τη χημική εξίσωση $pC_3H_4O_3 + qO_2 = rCO_2 + sH_2O$ σαν εξίσωση διατεταγμένων τριάδων με άγνωστους συντελεστές p, q, r και s.
(b) Βρείτε την ελάχιστη θετική ακέραια λύση για τα p, q, r και s.
(c) Παραστήστε σχηματικά τη λύση με ένα διανυσματικό διάγραμμα στον χώρο.

***34.** Βρείτε μια ευθεία που περιέχεται στο σύνολο που ορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

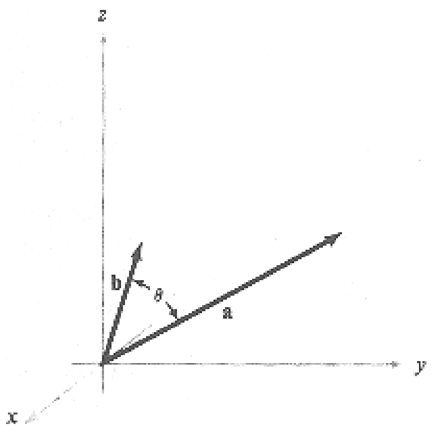
1.2

Το Εσωτερικό Γινόμενο

Σ' αυτή την παράγραφο και στην επόμενη θα συζητήσουμε δύο γινόμενα διανυσμάτων: το εσωτερικό γινόμενο και το εξωτερικό γινόμενο. Είναι και τα δύο πολύ χρήσιμα σε εφαρμογές στη Φυσική και έχουν ενδιαφέρουσες γεωμετρικές ερμηνείες. Το πρώτο γινόμενο με το οποίο θα ασχοληθούμε λέγεται *εσωτερικό γινόμενο.*

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ στον $\mathbf{R}^3$ (Σχήμα 1.2.1) και θέλουμε να προσδιορίσουμε τη γωνία που σχηματίζουν, δηλαδή τη μικρότερη γωνία που ορίζεται από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ στο επίπεδο που αυτά παράγουν. Το εσωτερικό γινόμενο μας βοηθάει να το κάνουμε. Ας αναπτύξουμε πρώτα την έννοια τυπικά και θα αποδείξουμε μετά ότι αυτό το γινόμενο μας επιτρέπει να πετύχουμε τον σκοπό μας. Εστω $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Ορίζουμε το *εσωτερικό γινόμενο* των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, και γράφουμε $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, να είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$



Σχήμα 1.2.1 θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

Προσέξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος. Μερικές φορές το εσωτερικό γινόμενο συμβολίζεται με $<\mathbf{a},\mathbf{b}>$. Αυτό συχνά γίνεται για τυπογραφικούς λόγους. *Δηλαδή τα* $<\mathbf{a},\mathbf{b}>$ *και* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ *σημαίνουν το ίδιο ακριβώς πράγμα.*

Από τον ορισμό παίρνουμε άμεσα κάποιες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Αν τα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ είναι διανύσματα στον $\mathbf{R}^3$ και α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

(i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0$·
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0$ αν και μόνον αν $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
(ii) $\alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ και $\mathbf{a}\cdot\beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.
(iii) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ και $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$.
(iv) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

Για να αποδείξουμε την πρώτη από αυτές τις ιδιότητες, ας παρατηρήσουμε ότι αν $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, τότε $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Αφού οι a_1, a_2 και a_3 είναι πραγματικοί αριθμοί, ξέρουμε ότι $a_1^2 \geq 0, a_2^2 \geq 0, a_3^2 \geq 0$. Άρα, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0$. Επιπλέον, αν $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, τότε $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, επομένως $\mathbf{a}$=$\mathbf{0}$ (μηδενικό διάνυσμα). Οι αποδείξεις των άλλων ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου είναι εξίσου εύκολες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (a) Αποδείξτε τις ιδιότητες (ii) και (iii) του εσωτερικού γινομένου.

(b) Αποδείξτε ότι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

2. Υπολογίστε το $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ όπου $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

3. Βρείτε τη γωνία μεταξύ των $7\mathbf{j} + 19\mathbf{k}$ και $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (σε ακέραιες μοίρες).

4. Υπολογίστε το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, όταν $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 315\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$ και $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.

5. Είναι η παράσταση $\|8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}\| \cdot \|6\mathbf{j} + \mathbf{k}\| - |(8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}) \cdot (6\mathbf{j} + \mathbf{k})|$ ίση με μηδέν; Εξηγήστε.

Στις Ασκήσεις 6 ώς 11 υπολογίστε τα $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ *και* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *για τα διανύσματα του* $\mathbf{R}^3$ *που δίνονται κάθε φορά.*

6. $\mathbf{u} = 15\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

7. $\mathbf{u} = \mathbf{j} - \mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{j} + \mathbf{i}$

8. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

9. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

10. $\mathbf{u} = -\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 4\mathbf{j}$

11. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

12. Κανονικοποιήστε τα διανύσματα στις Ασκήσεις 6 ώς 8.

13. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα των Ασκήσεων 9 ώς 11. Αν δεν γίνεται αλλιώς, διατυπώστε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας την $\cos^{-1}$.

14. Βρείτε την προβολή του $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ πάνω στο $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

15. Βρείτε την προβολή του $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ πάνω στο $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

16. Για ποιές τιμές του b το διάνυσμα $2\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ είναι ορθογώνιο προς το (a) $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, και (b) $\mathbf{k}$;

17. Βρείτε δύο μη παράλληλα διανύσματα ορθογώνια και τα δύο προς το $(1, 1, 1)$.

18. Βρείτε την ευθεία που περνάει από το $(3, 1, -2)$ και τέμνει υπό ορθή γωνία την ευθεία $x = -1 + t, y = -2 + t, z = -1 + t$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αν (x_0, y_0, z_0) είναι το σημείο τομής, βρείτε τις συντεταγμένες του.]

19. Υποθέτουμε ότι μία δύναμη $\mathbf{F}$ (για παράδειγμα, η βαρύτητα) ασκείται με κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω σε ένα αντικείμενο που βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο που σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια διεύθυνση. Εκφράστε τη δύναμη αυτή σαν άθροισμα μιας δύναμης που δρα παράλληλα προς το επίπεδο και μιας που δρα κάθετα σ' αυτό.

20. Υποθέτουμε ότι μια δύναμη που δίνεται από το διάνυσμα $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ασκείται σε ένα αντικείμενο που κινείται στην κατεύθυνση $\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Εκφράστε αυτή τη δύναμη σαν άθροισμα μιας δύναμης που έχει την κατεύθυνση της κίνησης και μιας δύναμης που είναι κάθετη στην κατεύθυνση της κίνησης.

21. Μια δύναμη 6 N (newtons) σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον άξονα y, δείχνοντας προς τα δεξιά. Η δύναμη αντιτίθεται στην κίνηση ενός αντικειμένου κατά μήκος της ευθείας που συνδέει το $(1, 2)$ με το $(5, 4)$.

(a) Βρείτε έναν τύπο για το διάνυσμα-δύναμη $\mathbf{F}$.

(b) Βρείτε τη γωνία, θ, που σχηματίζουν το διάνυσμα της κατεύθυνσης της κίνησης $\mathbf{D} = (5 - 1)\mathbf{i} + (4 - 2)\mathbf{j}$ και η κατεύθυνση της δύναμης $\mathbf{F}$.

(c) Το *έργο* που παράγεται είναι $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, ή ισοδύναμα, $\|\mathbf{F}\| \cdot \|\mathbf{D}\| \cos\theta$. Υπολογίστε το έργο και από τους δύο τύπους και κάνετε τη σύγκριση.

***22.** Ένα υγρό ρέει διαμέσου μιας επίπεδης επιφάνειας με ομοιόμορφη διανυσματική ταχύτητα $\mathbf{v}$. Έστω $\mathbf{n}$ ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια. Δείξτε ότι $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ είναι ο όγκος του υγρού που περνάει μέσα από μοναδιαία επιφάνεια του επιπέδου στη μονάδα του χρόνου.

1.3

Το Εξωτερικό Γινόμενο

Στην Παράγραφο 1.2 ορίσαμε ένα γινόμενο διανυσμάτων που ήταν βαθμωτό. Σ' αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε ένα γινόμενο διανυσμάτων που είναι διάνυσμα· δηλαδή, θα δείξουμε με ποιόν τρόπο,