M 1226

Πιθανότητες ΙΙ — Άσκηση 8

Β. Κλωνιάς. 22/11/12

---

1) Με χρήση ροπογεννητριών, βρήτε την κατανομή του αθροίσματος $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, όταν οι $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και:

[10]
- (α) $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$
- (β) $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$
- (γ) $X_i \sim \chi^2_{n_i}$

[5]
- (δ) $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$
- (ε) $X_i \sim \text{Bi}(n_i, p)$

[5]
- (ζ) $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$
- (η) $X_i \sim \text{NBi}(k_i, p)$

[5]
- (θ) $X_i \sim \text{Γεωμ.}(p)$.
- (ι) $X_i \sim \text{Εκθ.}(\lambda_i)$.

---

[10] 2) Έστω $X \sim \text{Εκθ.}(\lambda)$, $Y \sim \text{Εκθ.}(\mu)$, $X, Y$ ανεξ.
Βρήτε, χωρίς χρήση ροπογεννητριών, τις κατανομές των:
- (α) $X + Y$
- (β) $X \wedge Y \equiv \min\{X, Y\}$ (δηλ., $(X \wedge Y)(\omega) := \min\{X(\omega), Y(\omega)\}\ \forall \omega \in \Omega$)

---

[10] 3) Έστω $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$, $X, Y$ ανεξ.
Δείξτε ότι
- (α) $Z := \dfrac{X}{X+Y} \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, $S \equiv X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$ (απλώς διαπιστώστε το από το 1(β))
- και (β) $Z, S$ ανεξ.!