M1226
Πιθανότητες II
Β. Κλωνιάς

Άσκηση 3

11/10/12

1) (α) Δείξτε ότι η πυκνότητα της $N(\mu,\sigma^2)$ που σας δίδεται στον Πίνακα 4.63/σ.80, είναι πράγματι πυκνότητα πιθανότητος.

(β) Χρησιμοποιείστε τον Πίνακα 4.58/σ.77 για να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
$P(\mu-k\sigma \le X \le \mu+k\sigma)$, για $k=1, 1.5, 2.5$
όταν η τ.μ. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

2) α) Δείξτε ότι οι πυκνότητες των: Cauchy(α,β) και $\mathcal{G}(\alpha,\lambda)$ που σας δίδονται στον Πίνακα 4.63/σ.80, είναι πράγματι πυκνότητες πιθανότητος.

β) Βρείτε τις συναρτήσεις κατανομής (σ.κ.) των:
Cauchy(α,β), Εκθετική$(\lambda) \overset{d}{=} \mathcal{G}(1,\lambda)$, $\mathcal{G}(2,\lambda)$.

γ) Υπολογίστε τις πιθανότητες:
$P(X \le \frac{1}{\lambda})$, $P(\frac{1}{\lambda} \le X \le \frac{2}{\lambda})$, $P(X \le \frac{2}{\lambda} \mid X > \frac{1}{\lambda})$.
όταν η τ.μ. $X \sim$ Εκθ.(λ).

3) (α) Έστω ότι η τ.μ. $X \sim$ Εκθ.(λ), $\alpha>0$.
Δείξτε ότι η τ.μ. $Y := X^{1/\alpha} \sim$ Weibull(α,λ).

(β) Βρείτε τη σ.κ. της Weib.(α,λ), και υπολογίστε την πιθανότητα: $P\left(Y > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right)$

4) Αν $X \sim \mathcal{G}(n,\lambda)$, δείξτε ότι η $Y := 2\lambda X \sim \chi^2_{2n}$, δηλ. την $\mathcal{G}(n,\frac{1}{2})$. (βλ. και Σημ. 1/Πίνακα 4.63/σ.80)

5) Έστω $X \sim \mathcal{U}(0,1)$. Δείξτε ότι η $Y := -\frac{1}{\lambda}\log(1-X) \sim$ Εκθ.(λ) εφόσον $\lambda>0$.