

M 1226

Π. Γιαννίδης II

B. Κλωνίδης

Άσκηση 4

18/10/12

1) Στο Παράδ. 5.21/σ. 96 των Σημ., αποδείχθη ότι:

$$\text{Αν } X \sim \mathcal{G}(\alpha, \lambda), \alpha, \lambda > 0, \text{ τότε } EX^\delta = \frac{\Gamma(\alpha + \delta)}{\Gamma(\alpha) \lambda^\delta} \quad \forall \delta > -\alpha.$$

ως εφαρμογή του, υπολογίστε:

$$[5] \left\{ \begin{array}{l} \text{(α)} EX^4, \\ \text{(β)} EX^{-1}, \text{Var}(X^{-1}) \end{array} \right. \text{ εφόσον } \alpha \geq 3.$$

$$[5] \text{(γ)} EZ^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}, \text{ όπου } Z \sim N(0, 1),$$

αφού πρώτα δείξτε ότι $Z^2 \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \stackrel{d}{=} \chi_1^2$.

[5] 2) Έστω $X \sim \mathcal{N}(\text{Bi}(k, p))$.

(α) Δείξτε, χωρίς χρήση ροθογεννητριών, ότι: $EX = \frac{k}{p}$.

(β) Δείξτε, με χρήση ροθογεννητριών, ότι: $\text{Var}X = \frac{k(1-p)}{p^2}$.

(Υπόδ. βλ. και Άσκηση 1.1.)

[5] 3) Έστω $X \sim \text{Laplace}(\theta, \lambda)$, δηλ., $f_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\theta|}$, $x \in \mathbb{R}$.

Υπολογίστε τα EX και τα $\text{Var}X$.