M2611

Π. Στατιστική

Β. Κλωνιάς

Λύσεις 6

22/11/12

1) Έχουμε ήδη δει ότι η $T := \sum_{i=1}^n X_i$ είναι επαρκής για την p, και σ' αυτήν βασίσαμε τις Rao-Blackwell-οποιήσεις της Ασκ. 5.6, που οδήγησαν στις d_1, d_2. Για να είναι οι d_1, d_2 ΑΕΕΔ αρκεί να δείξουμε ότι η T είναι και πλήρης:

$$E_p g(T) = \sum_{t=n}^{\infty} g(t)\binom{t-1}{n-1} p^n (1-p)^{t-n} = 0 \quad \forall p$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=n}^{\infty} g(t)\binom{t-1}{n-1}(1-p)^t = 0 \quad \forall p \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=n}^{\infty} g(t)\binom{t-1}{n-1} x^t = 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow g(t)\binom{t-1}{n-1} = 0 \ \forall t \geq n$$

$\Rightarrow g(t) = 0 \ \forall t \in$ φορέα της T, δηλ. $g \equiv 0$ εκεί που ενδιαφέρει.

$\Rightarrow T$ πλήρης. $\Rightarrow d_1, d_2$ ΑΕΕΔ.

Τώρα, με πιθαν. 1, $T \geq n \Rightarrow T-1 \geq n-1 \Rightarrow \frac{n-1}{T-1} \leq 1$

$\Rightarrow d_1 \leq 1$ και $d_2 \leq \frac{T-n}{T-2} \leq 1$ εφόσον $n \geq 2$ (μέγεθος δείγματος)

$\Rightarrow E d_i^2 \leq 1, \ i=1,2 \Rightarrow Var\, d_i < +\infty, \ i=1,2$

Άρα οι d_1, d_2 είναι ! ΑΕΕΔ των $p, q(p)$ αντίστοιχα.

2) Από το Παράδ. 3.35/σ. 59 έχουμε ότι η $T = \sum_1^n X_i$ είναι επαρκής και πλήρης για την λ. Οπότε αρκεί να Rao-Blackwell-οποιήσουμε, μέσω της T, μια αμερόληπτη U για την $p(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, έστω την $U = 1(X_1 = k)$:

$d(X) = \mu(T)$, όπου $\mu(t) = E(U \mid T=t) =$

$$= P(X_1 = k \mid T=t) = \frac{P(X_1=k, T=t)}{P(T=t)} = \frac{P(X_1=k, \sum_2^n = t-k)}{P(T=t)} =$$

$$= \frac{P(X_1=k)\, P(\sum_2^n X_i = t-k)}{P(\sum_1^n X_i = t)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \cdot \frac{e^{-(n-1)\lambda}[(n-1)\lambda]^{t-k}}{(t-k)!} \cdot \frac{t!}{e^{-n\lambda}(n\lambda)^t} =$$

$$= \binom{t}{k}\frac{(n-1)^{t-k}}{n^t} \quad (<1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\underline{X}) = \mu(T) = \binom{T}{k}\frac{(n-1)^{T-k}}{n^T} \left(= \frac{T(T-1)\cdots(T-(k-1))}{(n-1)^k}\cdot\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)^T \right.$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-k}\left\{\bar{X}\left(\bar{X}-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(\bar{X}-\frac{k-1}{n}\right)\right\}\cdot\frac{1}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\bar{X}}$$

$$\left. \sim 1^{-k}\cdot(\bar{X})^k\cdot\frac{1}{k!}e^{-\bar{X}} \xrightarrow{P} \lambda^k\frac{1}{k!}e^{-\lambda} = p(k) \right).$$

just checking

3) Από την (3.36/σ.59), για $\alpha=1$, έχουμε ότι η $T\equiv\sum_1^n X_i$ είναι επαρκής και πλήρης για την λ. Οπότε αρκεί να Rao-Blackwell-οποιήσουμε μια αμερόληπτη U, π.χ., την $U = 1(X_1 \le x)$ για x σταθερό: $d(\underline{X}) = \mu(T)$, όπου:

$$\mu(t) = E(U \mid T=t) = P\left(X_1 \le x \,\Big|\, \sum_1^n X_i = t\right) =$$

$$= P\left(\frac{X_1}{X_1+\sum_2^n X_i} \le \frac{x}{t} \,\Big|\, \sum_1^n X_i = t\right) =$$

$\sim Beta(1, n-1)$ (βλ. 7.19/σ.139 των Σημ. Πιθαν.) και ανεξ. της $\sum_1^n X_i$ $(\sim \mathcal{G}(n,\lambda))$.

$$= P\left(W \le \frac{x}{t}\right) = \int_0^{x/t}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(1)\Gamma(n-1)}w^{1-1}(1-w)^{n-1-1}\,dw =$$

$$= (n-1)\int_0^{x/t}(1-w)^{n-2}\,dw = -(1-w)^{n-1}\Big|_0^{x/t} = 1-\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-1} \quad (<1)$$

$$\Rightarrow d(\underline{X}) = 1-\left(1-\frac{x}{T}\right)^{n-1} \left(= 1-\left(1-\frac{1}{\bar{X}}x\cdot\frac{1}{n}\right)^{n-1} \sim 1-\left(1-\frac{\lambda x}{n}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-e^{-\lambda x} \right)$$

just checking

4)(α)(β1) • $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$

(β2) • $\frac{n}{\hat{\lambda}} = \sum_1^n X_i (\equiv T) \sim \Gamma(n, \lambda)$

(προαιρετικά)

(β3) • $\frac{n\lambda}{\hat{\lambda}} \sim \Gamma(n, 1) \Longrightarrow \frac{2n\lambda}{\hat{\lambda}} \sim \Gamma(n, \tfrac{1}{2}) \overset{d}{\equiv} \chi^2_{2n}$

(β4) • $P_\lambda\left(\chi^2_{2n}(\alpha_1) \le \frac{2n\lambda}{\hat{\lambda}} \le \chi^2_{2n}(1-\alpha_2) \right) = 1 - \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{= \alpha} \ \forall \lambda \in \Theta = \mathbb{R}_+$

(β5) • $\Longleftrightarrow P_\lambda\left(\frac{\chi^2_{2n}(\alpha_1)}{2n} \hat{\lambda} \le \lambda \le \frac{\chi^2_{2n}(1-\alpha_2)}{2n} \cdot \hat{\lambda} \right) = 1 - \alpha \ \forall \lambda \in \Theta$

Άρα, το ζητούμενο Δ.Ε., συντελεστού εμπιστοσύνης $1-\alpha$, είναι το:

$I(\underline{X}) \equiv \left[\frac{\chi^2_{2n}(\alpha_1)}{2n} \hat{\lambda}, \frac{\chi^2_{2n}(1-\alpha_2)}{2n} \hat{\lambda} \right]$, με μήκος:

$$L = \frac{\chi^2_{2n}(1-\alpha_2) - \chi^2_{2n}(\alpha_1)}{2n} \hat{\lambda} \ \left(= L(\underline{X}) \text{ τ.μ.} \right)$$

(γ) Σημ. για τον υπολογισμό του (αριθμού) $\chi^2_{2n}(\alpha_1) = \frac{n}{f_{\infty,n}(1-\alpha_1)}$ (για α_1 μικρό) βλ. τις 3.184, 3.185/σ.115, και την τελευταία σειρά του Πίνακα της $F_{k,m}$/σ.14, ή ανάλογων Πινάκων. Για τον υπολογισμό του (αριθμού) $\chi^2_{2n}(1-\alpha_2)$ καλυπτόμεθα από τους Πίνακες της χ^2 (βλ. π.χ. σ.14)

(δ) $\hat{\hat{\lambda}} = \frac{n-1}{\sum_1^n X_i} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \hat{\lambda} \Rightarrow I(\underline{X}) = \left[\frac{n}{n-1} \frac{\chi^2_{2n}(\alpha_1)}{2n} \hat{\hat{\lambda}}, \frac{n}{n-1} \frac{\chi^2_{2n}(1-\alpha_2)}{2n} \hat{\hat{\lambda}} \right]$.