M2611

Π. Σταυρινού

Β. Μηλωνάκης

Λύσεις 4

1/11/12

1) 3.115(α)/σ.89: $l(\beta) = -n\log(2\pi) - n\log\beta - \sum_1^n \log\left(1+\frac{X_i^2}{\beta^2}\right)$

$= -n\log(2\pi) + n\log\beta - \sum_1^n \log(\beta^2+X_i^2)$

Η εκτ. λοιπόν, $\hat\beta$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση:

$l'(\hat\beta) = \frac{n}{\hat\beta} - 2\hat\beta\sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat\beta^2+X_i^2} = 0$, οι οποία όμως δεν

λύνεται σε κλειστή μορφή. Οπότε προσεγγίζουμε την $\hat\beta$ με την $\hat{\hat\beta}$

η οποία δίδεται από τη σχέση:

$\hat{\hat\beta} := \beta^0 - \frac{l'(\beta^0)}{l''(\beta^0)}$, όπου $\beta^0 = \mathrm{med}|X_i - \hat x|$, εν προκειμένω,

η οποία μπορεί να δειχθεί ότι είναι συνεπής.

2) 3.101(γ)/σ.85: $L(\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta_2-\theta_1} 1(\theta_1 \le X_i \le \theta_2) =$

$= \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} 1(\theta_1 \le X_1, X_2, \dots, X_n \le \theta_2)$

$= \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} 1(\theta_1 \le X_{1n}) 1(\theta_2 \ge X_{nn}) \le \frac{1}{(X_{nn}-X_{1n})^n}$ $\forall\, \theta_1, \theta_2$ με $\theta_1 < \theta_2$

$\uparrow \theta_1 \quad \downarrow \theta_2$

$\hat\theta_1 = X_{1n}$ και $\hat\theta_2 = X_{nn}$

3) 3.102(β)/σ.85: $\widehat{q(p)} = q(\hat p) = \frac{\hat p}{1-\hat p} = \frac{\bar X_n}{1-\bar X_n}$,

δεδομένου του ότι η $\hat p = \bar X_n$ (δείξτε το).

4) (α) Έχουμε δει ότι $\hat\theta = \bar X_n \Rightarrow \widehat{q(\theta)} = e^{-\hat\theta} = e^{-\bar X_n}$

ενώ η $\hat\eta$ ήταν $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\bar X_n} = \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\bar X}$, με $[\ ] \to e^{-1}$,

(β) $\sqrt{n}(\hat\theta_n - \theta) = \sqrt{n}(\bar X_n - EX_1) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \mathrm{Var}X_1 = \theta)$, από Κ.Ο.Θ.

$\Rightarrow \sqrt{n}\,(q(\hat\theta_n) - q(\theta)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, [q'(\theta)]^2\theta = \theta e^{-2\theta})$, από Θ. Σταθ. της Διασπ.

Οπότε η $q(\hat\theta_n)$ είναι Α.Κ. Είναι Β.Α.Κ.; Πρέπει να βρούμε την $I_1(\theta)$:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(X_1|\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\{-\theta + X_1\log\theta - \log X_1!\} = -1 + \frac{X_1}{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1(\theta) = Var\left\{-1+\frac{X_1}{\theta}\right\} = Var\left(\frac{X_1}{\theta}\right) = \frac{Var X_1}{\theta^2} = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta},$$

από δε την σχέση 3.155/σ. 103, $I_1(q(\theta)) = \frac{I_1(\theta)}{(q'(\theta))^2} = \frac{1}{\theta}\cdot(e^{-2\theta})^{-1} = e^{2\theta}/\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{I_1(q(\theta))} = \theta e^{-2\theta} = c^2(\theta)$ που βρήκαμε ως ασυμπτ. διασπορά της $q(\hat{\theta})$. Άρα $q(\hat{\theta})$ Β.Α.Κ.

5) 3.136/σ. 97: $c^2_{\bar{X}_n}(\theta) = Var X_1 = \frac{2}{\lambda^2}$,

ενώ $c^2_{\tilde{X}_n}(\theta) = \frac{1}{4f(m)^2} = \frac{1}{4\left\{\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|m-\theta|}\right\}^2} = \frac{1}{4\frac{\lambda^2}{4}} = \frac{1}{\lambda^2}$, όπου $m = \theta$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$a.r.e.(\theta \mid \tilde{X}_n, \bar{X}_n) = \frac{c^2_{\bar{X}_n}(\theta)}{c^2_{\tilde{X}_n}(\theta)} = \frac{2/\lambda^2}{1/\lambda^2} = 2.$$