

M1226

Π. Γιαννίδης II

Βιολωνιάς

Άσκηση 7

15/11/12

1) Έστω $(X, Y) \sim \text{Beta}_2(\alpha, \beta, \gamma)$ (η δι-διάστατη Beta της Άσκησης 6.2).

Υπολογίστε τον συνεπιδεσμένη συσχέτιση $\rho \equiv \rho(X, Y)$ των X, Y , και εξηγήστε το πώς μεταβάλλεται για τις διαδοχικές τιμές των α, β, γ .

2) Έστω $(X, Y) \sim N_2(0, 0 | 1, 1 | \rho)$, δηλαδή:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right\}, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Υπολογίστε το $\text{cov}(X, Y)$.

3) Έστω οι (εξαρτημένες ή μη) ζ.μ. X, Y με $\text{Var}X = \text{Var}Y$.

Υπολογίστε την συσχέτιση: $\text{cov}(X+Y+1, X-Y-1)$.

4) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n ανεξ. και ισόνομες $U(0,1)$.

(α) Βρείτε την κατανομή της $X_{(1)} := \min\{X_1, \dots, X_n\}$, καθώς και την κατανομή της $X_{(n)} := \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

(β) Χρησιμοποιήστε το αμοιβαίο θεώρημα της άσκησης 5 παραπάνω, για να βρείτε την πυκνότητα συγκατανομής των $(X_{(1)}, X_{(n)})$.

(γ) Επαληθεύστε ότι η συνάρτηση της $X_{(1)}$ που βρήκατε στο (α) είναι πράγματι περιθώρια της πυκνότητας που βρήκατε στο μέρος (β).

5) Έστω X_1, \dots, X_n α.κ. $F(x)$ (σ.κ.), με $f = F'$. Δείξτε ότι:

(α) $f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) = f(y)^n - [F(y) - F(x)]^n \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ με } x < y.$

(β) $f_{X_{(1)}, X_{(2)}}(x, y) = n(n-1) [F(y) - F(x)]^{n-2} f(x) f(y) \mathbb{1}(x < y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$

6) Έστω X, Y ανεξ. Ευδαικείς (1). Υπολογίστε την $f_{X+Y}(z)$.