Μ1226 – Πιθανότητες ΙΙ
Β. Κλωνιάς **27/9/2012**

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>

1) **Δείξτε ότι:** $(1-q)^{-K} = \sum_{j=K}^{\infty} \binom{j-1}{K-1} q^{j-K} \quad \forall\, q \in (0,1)$. **(Είναι ανάπτυγμα Taylor.)**

   Εξ' αυτού, δείξτε ότι αυτό που σας δίδεται στους πίνακες ως σ.μ.π. της NBinomial(K,p) , είναι πράγματι σ.μ.π..

2) **Δείξτε ότι αυτό που σας δίδεται στους πίνακες ως σ.μ.π. της Poisson(θ), είναι πράγματι σ.μ.π..** Δηλαδή δείξτε ότι $e^{\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\theta^j}{j!}$.

3) Υπολογίστε τα αθροίσματα:
$$\sum_{j=3}^{\infty} (1-p)^{j-1}, \quad \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\theta^j}{(j-1)!}, \quad \sum_{j=3}^{\infty} (1-p)^{2j-1}.$$

4) Δείξτε ότι:
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi},$$ και εξ' αυτού συνάγετε ότι:
$$\int_0^{\infty} z^{-1/2} e^{-z} dz = \sqrt{\pi}.$$

5) Δείξτε ότι: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

6) Έστω $g(x) := 1_B(x) \equiv 1(x \in B) \equiv \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in B \\ 0 & \text{αν } x \notin B \end{cases}$.
Πάρτε $B := \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^{-x}$ και υπολογίστε τα ολοκληρώματα:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z-x)\, g(z-x)\, f(x)\, g(x)\, dx \quad \forall z \in \mathbb{R}_+,$$
και:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z+x)\, g(z+x)\, f(x)\, g(x)\, dx \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

7) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-xy} e^{-x(y+1)} dx\, dy$.

8) Αν $X \sim$ Γεωμ.(p), $Y \sim$ Γεωμ.(q) και X, Y ανεξάρτητες.
Υπολογίστε τις πιθανότητες: $P(X=Y)$, $P(X<Y)$, $P(X$ άρτιος$)$,
$P(X$ περιττός $|$ Y άρτιος$)$.

9) X, Y ανεξ. και ισόνομες Poisson(θ). Υπολογίστε την πιθανότητα: $P(X=k \mid X+Y=n)$