Μ 2611 – Π. Στατιστική

Β. Κλωνιάς 27/9/2012

 AΣKHΣH 1

1) Έστω ανεξάρτητες τ.μ. Χ1 , Χ2 , . . . , Χn με Χi  ~ Γάμμα (αi , λ) i=1, . . . , n.

 (α) Δείξτε, με και χωρίς χρήση ροπογεννητριών, ότι η τ.μ.:

 Υn := ~ Γάμμα (, λ ).

 (β) Κατόπιν δείξτε ότι 2λΥn ~ , όπου α = – εφόσον βέβαια 2α ϵ N .

2) Έστω Ζ ~ Ν(0,1), Υ ~ και Ζ, Υ ανεξάρτητες. Δείξτε ότι η τ.μ.:

 Τn :=  ~ tn .

3) Έστω Χ1 , Χ2 , . . . , Χn α.ι. τ.μ., με Χi  ~ Ν(μ,σ2) i=1, . . . , n. Δείξτε ότι η τ.μ. :

 Τn := ~ tn-1 ,

όπου:  =  και = .

Υπόδ. Θυμίζουμε ότι έχουμε ήδη δείξει ότι, υπό την υπόθεση της Κανονικότητος των τ.μ. Χi , έχουμε: ~ Ν(μ, σ2/n) , / σ2 ~ 

και  ,  ανεξάρτητες.

4) Έστω Χ1 , Χ2 , . . . , Χn α.ι. τ.μ., με Χi  ~ U(0,1) i=1, . . . , n. Δείξτε ότι :

 X1n := min { Χ1 , Χ2 , . . . , Χn } ~ Beta(1,n),

και Xnn := max { Χ1 , Χ2 , . . . , Χn } ~ Beta(n,1).

5) Έστω τ.μ. Υ, με Ε(Υ2) < +. Δείξτε ότι θ σταθερά, Ε(Υ-θ)2 = Var(Y) + [E(Y) – θ]2.

6) Έστω ανεξάρτητες τ.μ. Χ1 , Χ2 , . . . , Χn με Χi  ~ Poisson (θi) i=1, . . . , n.

 Δείξτε, με και χωρίς χρήση ροπογεννητριών, ότι η τ.μ.:

 Υn := ~ Poisson ().

7) Έστω ανεξάρτητες τ.μ. Χ1 , Χ2 , . . . , Χn με Χi  ~ Binomial (mi ,p) i=1, . . . , n.

 Δείξτε, με χρήση ροπογεννητριών, ότι η τ.μ.:

 Υn := ~ Binomial (, p).

8) Έστω ανεξάρτητες τ.μ. Χ1 , Χ2 , . . . , Χn με Χi  ~ ΝBinomial (Κi ,p) i=1, . . . , n.

 Δείξτε ότι η τ.μ.: Υn := ~ ΝBinomial (, p).

Υπόδ. Δείξτε πρώτα ότι: (1-q)-K = q ϵ (0,1). (Είναι σειρά Taylor.)