M 2611
Π. Στατιστική
Β. Κλωνιάς

Άσκηση II

4/10/12

[15] 1) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ a.i. $\mathcal{U}(0,\theta)$, $\theta \in \Theta \equiv \mathbb{R}_+$, και έστω $\hat{\theta}_n$ και $\hat{\vartheta}_n$ δύο εκτιμήτριες της θ:
$\hat{\theta}_n := X_{nn}$ και $\hat{\vartheta}_n := 2\bar{X}_n$.

(α) Δείξτε ότι η $\hat{\vartheta}_n$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της θ, και υπολογίστε το $ΜΤΣ(\theta \mid \hat{\vartheta}_n)$, $\theta \in \Theta$.

(β) Υπολογίστε την μεροληψία της $\hat{\theta}_n$ και υπολογίστε το $ΜΤΣ(\theta \mid \hat{\theta}_n)$ $\forall \theta \in \Theta$.

(γ) Δείξτε ότι και οι δύο είναι συνεπείς εκτιμήτριες της θ, δηλαδή: $\hat{\vartheta}_n \xrightarrow{P_\theta} \theta$ $\forall \theta \in \Theta$,
καθώς και $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P_\theta} \theta$ $\forall \theta \in \Theta$.

[5] 2) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ a.i. $\mathcal{P}oisson(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}_+$, $\eta \equiv \varphi(\theta) := P_\theta(X_1 = 0)$. Δείξτε ότι η:

$$\hat{\eta}_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sum_1^n X_i}$$

είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της η. Κατόπιν υπολογίστε το ΜΤΣ της και δείξτε ότι:
$\hat{\eta}_n \xrightarrow{P_\theta} \eta$ $\forall \theta \in \Theta$.

[10] 3) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ a.i. $\mathcal{G}(\alpha, \lambda)$, $\lambda \in \Theta$ η άγνωστη παράμ. με $\alpha \geq 3$ γνωστό.
Θεωρήστε τις ακόλουθες δύο εκτιμήτριες της λ:

$$\hat{\lambda}_n := \frac{\alpha}{\bar{X}_n}, \quad \hat{\hat{\lambda}}_n := \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}.$$

(α) Δείξτε ότι η $\hat{\hat{\lambda}}_n$ είναι αμερόληπτη για την λ και υπολογίστε τη διασπορά της.

(β) Υπολογίστε τη μεροληψία της $\hat{\lambda}_n$ και δείξτε ότι είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτη, δηλ., $\dfrac{E\hat{\lambda}_n - \lambda}{\sqrt{Var\,\hat{\lambda}_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall \lambda$.