

# Συμπληρωματικές Ασκήσεις

Γ. Κοσιώρης

24 Απριλίου 2013

## Κεφάλαιο 2.1

1. Να γίνουν οι ασκήσεις 5, 6, 7, 14, 15, 17, 18, 31 και 32 σελ. 72.

## Κεφάλαιο 2.2

1. Να γίνουν οι ασκήσεις 6, 9, 15, 16 και 23, σελ. 87.
2. Να βρείτε τα παρακάτω όρια, αν υπάρχουν.

$$(\alpha') \lim_{(x,y) \rightarrow (0, \ln 2)} \exp(x^2 - y)$$

$$(\beta') \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 - x}{3y^2 + x}$$

$$(\gamma') \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sin(x-y+1)}{x+y-3}$$

$$(\delta') \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$$

$$(\epsilon') \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^3}{x^6 + y^4}$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.

$$(\alpha') \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\exp(-x^2 - y^2) \cos(xy) - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(\beta') \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\exp(x(y+1)) - x - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

4. Εστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } y \leq 0 \text{ ή αν } y \geq x^2 \\ 1 & \text{αν } 0 < y < x^2 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι  $f(x, y) \rightarrow 0$  καθώς  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  κατά μήκος οποιασδήποτε ευθείας που περνάει από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε μια καμπύλη που περνάει από την αρχή των αξόνων όπου κατά μήκος της οποίας, εκτός από την αρχή των αξόνων, η συνάρτηση παίρνει τη σταθερή τιμή 1. Υπάρχει το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ;

## Κεφάλαιο 2.3

1. Να γίνουν οι ασκήσεις 8, 13, 14 και 4, σελ. 99.

2. Βρείτε τα σημεία του γραφήματος της συνάρτησης  $f(x, y) = x^2 - 5x + y^2 - 7$  στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο προς το επίπεδο  $7x - 4y + 2z = 3$

3. Εστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ . β) Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι  $f_x(0, 0)$ ,  $f_y(0, 0)$ . γ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y)$  και εφόσον υπάρχει να εξετάσετε αν ισούται με  $f_x(0, 0)$ . Να εξετάσετε το ίδιο ερώτημα για τις  $f_y(x, y)$  και  $f_y(0, 0)$ . δ) Να δείξετε ότι η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

4. Εστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

α) Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι  $f_x(0, 0)$ ,  $f_y(0, 0)$ . β) Να δείξετε ότι οι  $f_x$  και  $f_y$  δεν είναι συνεχείς στο  $(0, 0)$ . γ) Να δείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ .

**Παρατήρηση:** Οι Ασκήσεις 3 & 4 σχετίζονται με το κατά πόσον ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 9, σελ. 98 του βιβλίου σας.

## Κεφάλαιο 2.4

1. Να γίνουν οι ασκήσεις 5, 8, 10, 13, 15 και 20, σελ. 110-112.

## Κεφάλαιο 2.5

1. Να γίνουν οι ασκήσεις 5, 8, 16, 20 και 21 σελ. 120-122.

2. Θεωρείστε τις δύο τεμνόμενες επιφάνειες

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= -7 \\ 3x^2 + y^2 + z^2 &= 13 \end{aligned}$$

Η τομή των δύο επιφανειών ορίζει μία καμπύλη. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που είναι εφαπτόμενη σε αυτή την καμπύλη στο σημείο  $(1, 1, 3)$ .

3. Θεωρείστε τις δύο επιφάνειες

$$f(x, y, z) = 0 \text{ και } g(x, y, z) = 0$$

των οποίων η τομή είναι μία καμπύλη στο χώρο. Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο σε αυτή την καμπύλη στο σημείο  $(x_1, y_1, z_1)$ .

## Κεφάλαιο 2.6

1. Για να εξασκηθείτε στον υπολογισμό των μερικών παραγώγων να κάνετε όσα περισσότερα ερωτήματα μπορείτε από τις ασκήσεις 3,4 και 5 της σελ. 131.
2. Να κάνετε τις ασκήσεις 16 και 17 σελ. 132.
3. Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης  $f(x, y) = x^2 - 3y^2$  κατά μήκος της παραβολής  $y = x^2 - x + 2$  στο σημείο  $(1, 2)$ .
4. Δίδονται οι ομαλές συναρτήσεις  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x, y)$  και  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  με  $g(u, v) = (u^2 - v^2, u^2 - 2uv)$ . Να υπολογισθεί η μικτή παράγωγος  $\frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial u \partial v}$  στο σημείο  $(2, 1)$  αν  $f_x(3, 0) = f_y(3, 0) = 2$ ,  $f_{xx}(3, 0) = f_{yy}(3, 0) = 1$  και  $f_{xy}(3, 0) = 3$ .

## Επαναληπτικές ασκήσεις Κεφαλαίου 2

1. Να επιλύσετε τις ασκήσεις 3, 6, 8, 17, 18, 21, 24, 26, 31, 34, 44 σελ. 142.

## Κεφάλαιο 4.1

1. Να επιλύσετε τις ασκήσεις 2-6 σελ. 201.
2. Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης γύρω από το σημείο  $(0, 0)$  της συνάρτησης  $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cos(xy)$  και κατόπιν να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} \cos(xy) - 1}{x^2 + y^2}.$$

## Κεφάλαιο 4.2

1. Να επιλύσετε τις ασκήσεις 8, 11, 15, 17, 26, 31, 39. σελ. 215-217.
2. Να βρεθεί το μέγιστο της  $f(x, y) = 4xy - 2y^2$  στο τετράγωνο  $D = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ .
3. Να εξετάσετε ποιά είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1$  στον εξωτερικό δίσκο  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$  και σε ποιό σημείο επιτυγχάνεται. Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.
4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ . Δείξτε ότι
  - (α) Η αρχή των αξόνων είναι κρίσιμο σημείο της  $f$ .
  - (β) Η αρχή των αξόνων δεν είναι σχετικό ακρότατο της  $f$ .
 Υπόδειξη: Εξετάστε την  $f \circ \sigma_a$  πάνω στις παραβολές  $\sigma_a(t) = (t, at^2)$  για διάφορες τιμές του  $a$ .

## Κεφάλαιο 4.3

1. Να επιλύσετε τις ασκήσεις 4, 9, 10, 11, 12, 13, 19 σελ. 230-231.
2. Να βρεθεί το μέγιστο εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου που μπορεί να εγγραφεί στην έλλειψη

$$x^2/9 + y^2/16 = 1.$$

3. Σε ποιά σημεία της τομής των επιφανειών

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ και } x + z = 1,$$

η συνάρτηση  $f(x, y, z) = 2x + 3y + z$  εμφανίζει τοπικό ακρότατο; Ποιά είναι η τιμή μεγίστου και ποιά η τιμή ελαχίστου της συνάρτησης στα αντίστοιχα σημεία;

#### Κεφάλαιο 4.4

1. Να επιλύσετε τις ασκήσεις 3, 6, 8, 9, 12 σελ. 241 του βιβλίου σας.

2. Αν η πεπλεγμένη συνάρτηση  $z = g(x, y)$  ορίζεται από την εξίσωση

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

να δειχτεί ότι

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$