ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ **Εαρινό Εξάμηνο 2011-2012**
Τμήμα Μαθηματικών **Διδάσκοντες** **Ε.Νικολιδάκης - Θ.Μήτσης**
Γ.Κοσιώρης - Ν. Τζανάκης

ΟΛΟΗΜΕΡΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Φυλλάδιο 3

Τετάρτη, 21/3/2012

Ασκήσεις Απειροστικού ΙΙ

Άσκηση 3.1 Επαληθεύστε τον κανόνα τής αλυσίδας για τις συναρτήσεις $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ και $\vec{\gamma}\,(t) = (\cos t, \sin t, 2)$.

Άσκηση 3.2 Έστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $\nabla f(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})\,\vec{x}$, όπου $\varphi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή πάνω σε κάθε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 3.3 Βρείτε μια ευθεία η οποία εφάπτεται στις επιφάνειες $x^2+y^2+2z^2=4$ και $z=e^{x-y}$ στο σημείο $(1,1,1)$.

Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας

Άσκηση 3.4 Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, απαντήστε αν $w \in V$

(α′) $w=(6,-5,9)$, $V=\langle(2,-1,3)\rangle$.
(β′) $w=(0,5)$, $V=\langle(1,3),\,(2,4),\,(0,1)\rangle$.
(γ′) $w=(6,-3,8)$, $V=\langle(1,-2,0),\,(2,1,4),\,(7,-9,4)\rangle$.

Άσκηση 3.5 Έστω ότι $v_1,v_2,v_3 \in \mathbb{R}^n$. Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις (α′)-(γ′) δίδονται τα εξής: (1) *Πιθανόν*, η πληροφορία αν τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή γραμμικώς εξαρτημένα και (2) Διανύσματα w_1,w_2,w_3, τα οποία εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των v_1,v_2,v_3. Σε κάθε περίπτωση ζητείται να απαντήσετε αν τα w_1,w_2,w_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ή γραμμικώς εξαρτημένα.

(α′) Τα $v_1,v_2,v_3 \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $w_1=v_1+v_2+2v_3$, $w_2=v_1-v_2-v_3$, $w_3=v_1+v_3$.
(β′) Τα $v_1,v_2,v_3 \in \mathbb{R}^n$ είναι οποιαδήποτε και $w_1=v_1+v_2+2v_3$, $w_2=v_1-v_2-v_3$, $w_3=v_1+3v_2+5v_3$.
(γ′) Τα $v_1,v_2,v_3 \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα και $w_1=v_1+v_2+2v_3$, $w_2=v_1-v_2-v_3$, $w_3=v_1+v_3$.

Άσκηση 3.6 Θυμηθείτε ότι, αν $AB=C$, τότε (j-στήλη C) $=\sum_k (B)_{kj}\cdot$ (k-στήλη A), όπου $k=1,\ldots,$ πλήθος γραμμών του B.
Βάσει αυτού αποδείξτε ότι $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A) \quad (*)$.
Στη συνέχεια θεωρήστε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ και τους πίνακες $B_1=\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ και $B_2=\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ και εξετάσετε, για $B=B_1,B_2$, αν στη σχέση $(*)$ ισχύει το $=$.

Άσκηση 3.7 Είναι τα ακόλουθα αληθή ή ψευδή; Δώστε αντιπαράδειγμα εάν είναι ψευδή και αιτιολόγηση εάν είναι αληθή.

(α΄) Αν ο $\mathcal{R}(A)$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, τότε A είναι ο μηδενικός πίνακας.

(β΄) Ο χώρος στηλών του $A - I$ είναι ίσος με το χώρο στηλών του A (ισοδύναμη διατύπωση: $\mathcal{R}(A - I) = \mathcal{R}(A)$).

(γ΄) Ο χώρος στηλών του πίνακα $2A$ είναι ίσος με το χώρο στηλών του A (ισοδύναμη διατύπωση: $\mathcal{R}(2A) = \mathcal{R}(A)$).