

# Προτεινόμενες Ασκήσεις

21 Ιανουαρίου 2013

## Α.ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

### Κεφάλαιο 3

1. Να γίνουν οι ασκήσεις 2 και 4 σελ. 177.
2. Να γίνουν οι ασκήσεις 6, 7 και 8 σελ. 185.
3. Να υπολογισθούν οι σταθερές  $\alpha, \beta, \gamma$  έτσι ώστε το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = (3x - 2y + \alpha z)\vec{i} + (\beta x + 3y + 5z)\vec{j} + (2x + \gamma y - z)\vec{k}$$

να είναι αστρόβιλο. Να βρεθεί η βαθμωτή συνάρτηση  $f$  τέτοια ώστε

$$\vec{F} = \nabla f$$

**Απάντηση:**  $f = \frac{3}{2}x^2 - 2xy + 2xz + \frac{3}{2}y^2 + 5yz - \frac{z^2}{2}$

4. Είναι το παρακάτω διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = x^3y\vec{i} + yx^2\vec{j} + xz\vec{k}$$

πεδίο κλίσεων; Γιατί;

5. Να γίνουν οι ασκήσεις 2, 3, 5 και 8 σελ. 193.

### Κεφάλαιο 7

#### Κεφάλαιο 7.1

1. Να γίνουν οι ασκήσεις 3, 4 και 13 σελ. 354.

#### Κεφάλαιο 7.2

1. Να γίνουν οι ασκήσεις 2, 4, 12 και 16 σελ. 370.

#### Κεφάλαιο 7.3

1. Να περιγράψετε τους διάφορους τρόπους αναπαράστασης μιας επιφάνειας στο χώρο. Πώς ορίζεται το κάθετο διάνυσμα και πώς το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε περίπτωση;
2. Ποιές είναι οι εξισώσεις σε παραμετρική μορφή των παρακάτω επιφανειών: κύλινδρος, κώνος, παραβολοειδές, ελλειψοειδές, υπερβολοειδές, σφαιρική επιφάνεια, τόρος.

Απάντηση: Για τον τόρο

$$x = (R + \cos \phi) \cos \theta, \quad y = (R + \cos \phi) \sin \theta, \quad z = \sin \phi$$

3. Να γίνουν οι ασκήσεις 5, 10, 12 και 13 σελ. 380.

### Κεφάλαιο 7.4

1. Να γίνουν οι ασκήσεις 4, 6, 11 και 13 σελ. 391.

### Κεφάλαιο 7.5

1. Να γίνουν οι ασκήσεις 5 και 7 σελ. 398.
2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_S (y + z) dS$  όπου  $S$  είναι η επιφάνεια της οποίας το πλευρικό τμήμα είναι ο κύλινδρος  $x^2 + y^2 = 3$  και φράσσεται από κάτω από το επίπεδο  $z = 0$  και από πάνω από το επίπεδο  $z = 4 - y$ .

Απάντηση:  $\frac{\pi}{2}(29\sqrt{3} + 24\sqrt{2})$

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_S z dS$  όπου  $S$  είναι το πάνω μισό μιας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας 2.

Απάντηση:  $8\pi$

### Κεφάλαιο 7.6

1. Να δώσετε ένα παράδειγμα μιας επιφάνειας που δεν είναι δίπλευρη.
2. Να γίνουν οι ασκήσεις 5, 7, 10 σελ. 412.
3. Να γίνουν οι ασκήσεις 8 και 16 σελ. 412. (Για όσους τους αρέσουν οι εφαρμογές)

Απαντήσεις: Ασκήση 8: (a)  $4\pi R^3$  (b)  $R > 0$  (c)  $-228\pi R^4 k$

Ασκήση 16: (a)  $\pi$  (b)  $\pi \frac{\sqrt{2}}{2}$

## Κεφάλαιο 8

### Κεφάλαιο 8.1

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int (4x^2 + 3 \sin y)dx + (3x \cos y + 4x)dy$$

κατά μήκος του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(5, 2)$  και  $(1, 2)$ .

2. Να επαληθεύσετε το θεώρημα Green για το ολοκλήρωμα

$$\int_C (3x - 2y)dx + (x - 4y)dy$$

πάνω στην καμπύλη  $C$  που είναι το σύνορο του διπλά συνεκτικού χωρίου που περι-  
κλείεται από τους κύκλους  $x^2 + y^2 = 16$  και  $x^2 + y^2 = 1$ .

3. Να γίνουν οι ασκήσεις 3, 4, 12 και 15 σελ. 426 του βιβλίου σας.  
4. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το φύλλο του Descartes  
 $x^3 + y^3 = 3xy$  στο πρώτο τεταρτημόριο.

Υπόδειξη:

$$x = \frac{3t}{1+t^3} \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

## Κεφάλαιο 8.2

1. Να γίνουν οι ασκήσεις 5, 7 και 9 σελ. 437 του βιβλίου σας.  
2. Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Stokes για το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = (x^3 + \frac{yz^2}{2})\vec{i} + (\frac{xz^2}{2} + y^2)\vec{j} + xyz\vec{k}$$

όπου  $S$  είναι η επιφάνεια του κύβου που περικλείεται από τα επίπεδα  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  
 $x = 3$ ,  $y = 3$  και  $z = 3$  και βρίσκεται πάνω από το  $xy$ -επίπεδο.

3. Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Stokes για το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = xz\vec{i} + y\vec{j} + y^2x\vec{k}$$

όπου  $S$  είναι η επιφάνεια που περικλείεται από τα επίπεδα  $y = 0$ ,  $z = 0$  και  $4x + y + 2z = 4$  για  $x \geq 0$ .

4. Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Stokes για το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = (\frac{z^4}{4} + x^3)\vec{i} + 4x\vec{j} + (xz^3 + z^2)\vec{k}$$

όπου  $S$  είναι η πάνω επιφάνεια της σφαίρας  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  και το σύνορο της  
διαγράφεται αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

## **B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

### **Κεφάλαιο 2**

**Κεφάλαιο 2.1:** Να γίνουν οι ασκήσεις 4, 6, 7, 8 και 16, σελ. 28 του βιβλίου σας.

**Κεφάλαιο 2.2:** Να γίνουν οι ασκήσεις 9 έως 16, σελ. 36 του βιβλίου σας.

**Κεφάλαιο 2.3:** Να γίνουν οι ασκήσεις 9 έως 15, σελ. 44 του βιβλίου σας.

**Κεφάλαιο 2.8:** Να γίνουν οι ασκήσεις 4, 6, 7, 9, 11 και 14, σελ. 99 του βιβλίου σας.

**Κεφάλαιο 2.9:** Να γίνουν οι ασκήσεις 5, 6, 7 και 8, σελ. 104 του βιβλίου σας.

### **Κεφάλαιο 3**

**Κεφάλαιο 3.1:** Να γίνουν οι ασκήσεις 14, 15, 17, 19 και 21, σελ. 143 του βιβλίου σας.

**Κεφάλαιο 3.2:** Να γίνουν οι ασκήσεις 7, 8, 13 και 14, σελ. 154 του βιβλίου σας.

**Κεφάλαιο 3.3:** Να γίνουν οι ασκήσεις 6, 9, 10, 15 και 16, σελ. 161 του βιβλίου σας.

**Κεφάλαιο 3.4:** Να γίνουν οι ασκήσεις 11, 12, 19, 20 και 25, σελ. 169 του βιβλίου σας.

**Κεφάλαιο 3.5:** Να γίνουν οι ασκήσεις 11, 12, 15 και 18, σελ. 179 του βιβλίου σας.

**Κεφάλαιο 3.6:** Να γίνουν οι ασκήσεις 11, 12, 13, 14 και 18, σελ. 192 του βιβλίου σας.

**Κεφάλαιο 3.7:** Να γίνουν οι ασκήσεις 5, 6, 7, 13 και 14, σελ. 195 του βιβλίου σας.