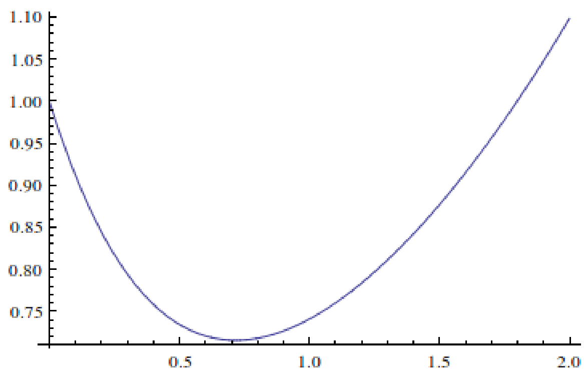
3^o Εργαστήριο Διαφορικών Εξισώσεων

1. Θεωρούμε την εξίσωση
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$
Τι είναι ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της παραπάνω εξίσωσης; Πως ορίζεται η ορίζουσα Wronski; Σε τι μας χρησιμεύει; Να δείξετε ότι η ορίζουσα Wronski $W(t)$ δίνεται από τη σχέση
$$W(t) = W(t_0)\exp\Big[-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\Big].$$

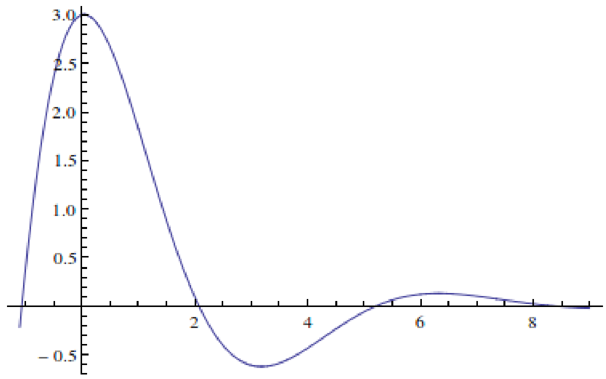
2. Αν η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων f και g είναι $3e^{4t}$ και αν $f(t) = e^{2t}$ να υπολογίσετε την g.

3. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$2y'' + 3y' - 2y = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = -\beta,$$
με $\beta > 0$.
α) Να επιλυθεί το παραπάνω πρόβλημα.
β) Για $\beta = 1$ να βρείτε αν η λύση έχει μέγιστο ή ελάχιστο (σε ποιό σημείο;) και να τη σχεδιάσετε. Δείτε το παρακάτω σχήμα.



γ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β για την οποία η λύση δεν έχει σημείο ελαχίστου.

4. Να επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$y'' + y' + 1.25y = 0, \;\; y(0) = 3, \;\; y'(0) = 1.$$
Να βρείτε τους χρόνους που η y μηδενίζεται. Το γράφημα της λύσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



5. Η εξίσωση της μορφής

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha t\frac{dy}{dt}+\beta y=0,\quad t>0,$$

όπου τα α, β είναι πραγματικές σταθερές ονομάζεται εξίσωση $Euler$.
α) Αν $x=\ln t$ να υπολογίστε τις παραγώγους dy/dt και d^2y/dt^2 μέσω των παραγώγων dy/dx και d^2y/dx^2.
β) Να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα του α) για να δείξετε ότι η y σαν συνάρτηση του x ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(\alpha-1)\frac{dy}{dx}+\beta y=0.$$

6. Να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη άσκηση για να επιλύσετε την εξίσωση

$$t^2y''+3ty'+1.25y=0.$$

7. Να επιλύσετε τις εξισώσεις
α) $y''+xy'+y=0$ β) $x^2y''+xy'-y=0$.
Υπόδειξη: Να γράψετε τις εξισώσεις στη μορφή $(p(t)y')'+(q(t)y)'=0$.