

#### 4<sup>ο</sup> Εργαστήριο Διαφορικών Εξισώσεων

1. Η μέθοδος υποβιβασμού της τάξης εφαρμόζεται και σε εξισώσεις ανώτερης τάξης. Αν  $y_1$  είναι μια λύση της εξίσωσης

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0,$$

να δείξετε ότι η αντικατάσταση  $y = y_1(t)v(t)$  οδηγεί στην παρακάτω εξίσωση για την  $v'$ :

$$y_1 v''' + (3y_1' + p_1 y_1) v'' + (3y_1'' + 2p_1 y_1' + p_2 y_1) v' = 0.$$

2. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$(2 - t)y''' + (2t - 3)y'' - ty' + y = 0, \quad t < 2, \quad y_1(t) = e^t.$$

*Υπόδειξη:* Να βρείτε πρώτα μια λύση της μορφής  $t^\alpha$ . Κατόπιν να εφαρμόσετε τη μέθοδο υποβιβασμού της τάξης για να βρείτε την τρίτη ανεξάρτητη λύση. Να δείξετε υπολογίζοντας την ορίζουσα Wronski ότι οι τρεις λύσεις είναι ανεξάρτητες.

3. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y^{(6)} + y = 0.$$

4. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0.$$

5. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'' - 2y' + y = te^t + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

6. Να βρείτε μια ειδική λύση της εξίσωσης:

$$y'' - 4y' + 4y = 2t^2 + 4te^{2t} + t \sin 2t.$$

7. Να επιλυθεί η εξίσωση

$$y'' + 2y' + 5y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0, & t > \pi/2 \end{cases}$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες  $y(0) = 0$  και  $y'(0) = 0$ .

*Υπόδειξη:* Σε πολλά φυσικά προβλήματα ο μη ομογενής όρος δίνεται από μια κλαδωτή συνάρτηση. Επειδή αναζητούμε ομαλή λύση θεωρούμε ότι οι  $y, y'$  είναι συνεχείς στο  $\pi/2$ .