

5^ο Εργαστήριο Διαφορικών Εξισώσεων

1. Να δείξετε ότι στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών για την εύρεση μιας μερικής λύσης της δ.ε.

$$ay'' + by' + cy = P_n(t),$$

όπου το $P_n(t)$ είναι πολυώνυμο n -βαθμού, πρέπει να αναζητήσουμε μερική λύση στη μορφή $Y(t) = t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \dots + A_n)$ όπου $s = 0, 1, 2$, είναι η πολλαπλότητα του μηδενός σαν ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Γιατί είναι αυτό ταυτόσημο με το ότι επιλέγουμε το s έτσι ώστε να μην υπάρχει όρος στην $Y(t)$ που να είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης.

2. Να δείξετε ότι στη μέθοδο των μεταβαλλόμενων συντελεστών (παραμέτρων) για την εξίσωση

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} \dots p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = g(t),$$

οι μεταβαλλόμενοι συντελεστές υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$u'_m(t) = \frac{g(t)W_m(t)}{W(t)}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

$W(t)$ είναι η ορίζουσα Wronski των n ανεξάρτητων λύσεων της ομογενούς εξίσωσης και τα $W_m(t)$ προκύπτουν από την ορίζουσα Wronski αν αντικαταστήσουμε την m -στήλη με το διάνυσμα στήλη $[0, \dots, 1]^T$.

3. Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$y''' - y' = t$$

Υπόδειξη: Να βρείτε μια μερική (ειδική) λύση της παραπάνω εξίσωσης με τη μέθοδο των μεταβαλλόμενων συντελεστών.

4. Να επιλυθεί η εξίσωση

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x, \quad x > 0.$$

Πρώτα να αναζητήσετε λύση στη μορφή x^α για την ομογενή εξίσωση. Κατόπιν να βρείτε μια δεύτερη ανεξάρτητη λύση της ομογενούς με τη μέθοδο υποβιβασμού της τάξης. Τέλος να βρείτε μια μερική λύση της παραπάνω εξίσωσης με τη μέθοδο των μεταβαλλόμενων συντελεστών.