

6° Εργαστήριο Διαφορικών Εξισώσεων

1. Να επιλυθεί το σύστημα

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές διευθύνσεις του συστήματος; Που συγκλίνουν οι τροχιές καθώς $t \rightarrow \pm\infty$. Να γίνει σκαρίφημα του διαγράμματος φάσεων και να σημειώσετε με βελάκια τις κατευθύνσεις των τροχιών.

2. Να επιλυθεί το σύστημα

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές διευθύνσεις του συστήματος; Που συγκλίνουν οι τροχιές καθώς $t \rightarrow \pm\infty$. Να γίνει σκαρίφημα του διαγράμματος φάσεων και να σημειώσετε με βελάκια τις κατευθύνσεις των τροχιών.

3. Να επιλυθεί το σύστημα

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ 9/5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές διευθύνσεις του συστήματος; Που συγκλίνουν οι τροχιές καθώς $t \rightarrow \pm\infty$. Να γίνει σκαρίφημα του διαγράμματος φάσεων και να σημειώσετε με βελάκια τις κατευθύνσεις των τροχιών.

4. Να επιλυθεί το σύστημα

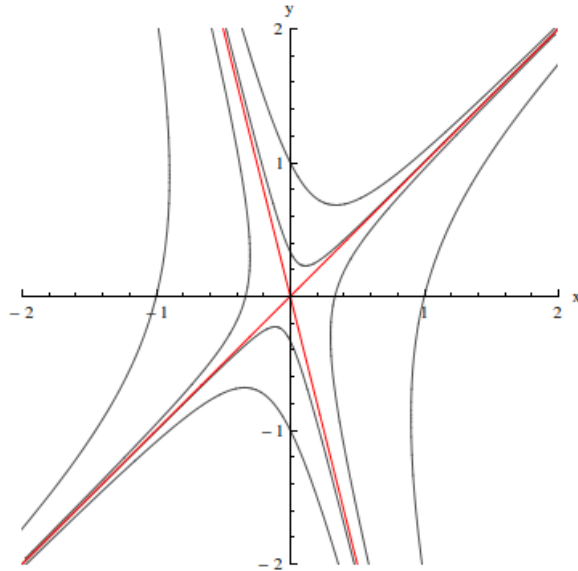
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 5/2 \\ -5/2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές διευθύνσεις του συστήματος; Που συγκλίνουν οι τροχιές καθώς $t \rightarrow \pm\infty$. Να γίνει σκαρίφημα του διαγράμματος φάσεων και να σημειώσετε με βελάκια τις κατευθύνσεις των τροχιών.

Απαντήσεις

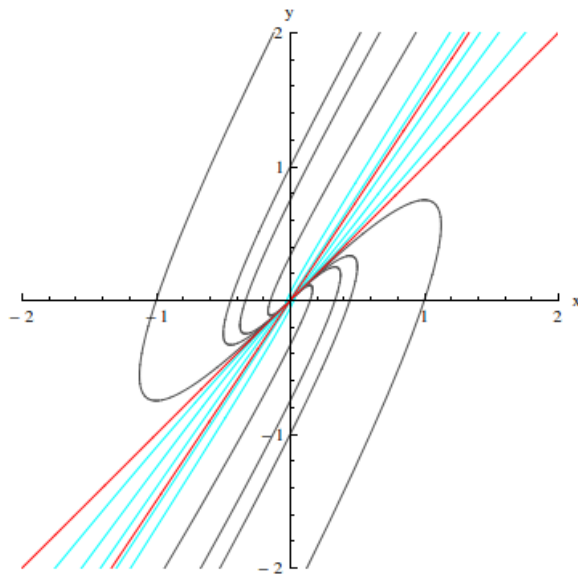
1. Η λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{x}'(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$



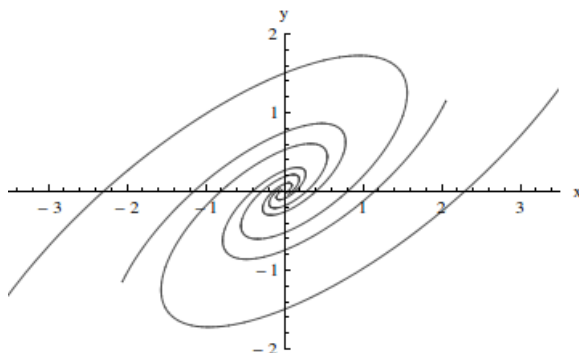
2. Η λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{x}'(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$$



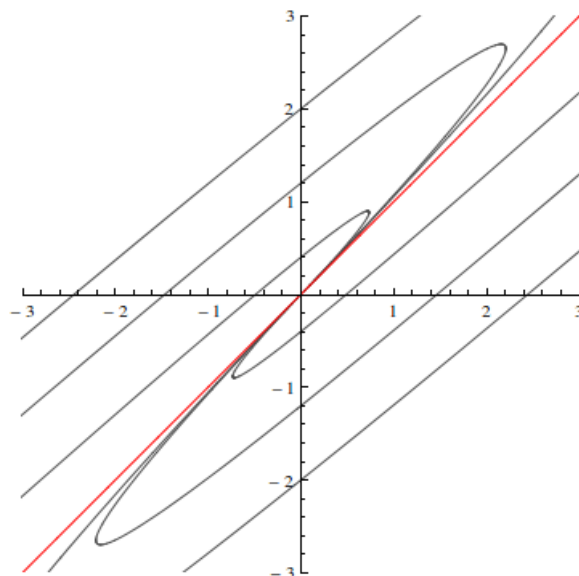
3. Οι ιδιοτιμές είναι $r = (1 \pm 3i)/2$ με ιδιοτιμές $\xi = (5, 3 - 3i)^T$. Η λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{x}'(t) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \cos(3t/2) \\ 3 \cos(3t/2) + 3 \sin(3t/2) \end{pmatrix} e^{t/2} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \sin(3t/2) \\ -3 \cos(3t/2) + 3 \sin(3t/2) \end{pmatrix} e^{t/2}$$



4. Η λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{x}'(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/5 \end{pmatrix} e^{-t/2} \right]$$



Το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα είναι λύση του συστήματος

$$\begin{pmatrix} -5/2 & 5/2 \\ -5/2 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$