8^o Εργαστήριο Διαφορικών Εξισώσεων

1. Πότε μια περιοδική συνάρτηση θα λέγεται άρτια και πότε περιττή; Εστω ότι f και f' είναι κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις για $-L \leq x < L$ και ότι η f είναι περιοδική με περίοδο $2L$. Να δείξετε ότι ισχύουν τα εξής για τους συντελεστές Fourier της f:
   α) Αν η f είναι άρτια τότε ισχύει
   $$\begin{cases} a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, & n = 0,1,2,\ldots \\ b_n = 0, & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$
   β) Αν η f είναι περιττή τότε ισχύει
   $$\begin{cases} a_n = 0, & n = 0,1,2,\ldots \\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

2. Να ορίσετε την άρτια και περιττή περιοδική επέκταση της συνάρτησης $f(x) = 3 - x$, $0 < x < 3$, με περίοδο 6.
   α) Να κάνετε ένα σκαρίφημα αυτών των επεκτάσεων για τρείς περιόδους.
   β) Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα Fourier αυτών των επεκτάσεων και να κάνετε το γράφημα τους διατηρώντας 4 όρους του αναπτύγματος.
   γ) Να διερευνήσετε την εξάρτηση της σφάλματος μεγίστου από το n.

3. Θεωρείστε μια μεταλλική ράβδο με συντελεστή διάχυσης $\alpha^2 = 1$ μήκους 30. Αν η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας είναι $x(60-x)/30$ με συνοριακές συνθήκες $u(t,0) = 30$ και $u(t,30) = 0$, να βρεθεί η κατανομή της θερμοκρασίας $u(t,x)$. Ποιά είναι η κατανομή της θερμοκρασίας για $t \to \infty$;

4. Θεωρείστε μια μεταλλική ράβδο με συντελεστή διάχυσης $\alpha^2 = 1$ μήκους L. Θεωρούμε ότι η ράβδος θερμαίνεται από μια εξωτερική πηγή θερμότητας έντασης $f(x) = kx/L$ και η θερμοκρασία στο αριστερό και δεξιό άκρο διατηρείται σταθερή και ίση με $T_1 = 10$ και $T_2 = 30$ αντίστοιχα. Αν $k = 1/2$, $L = 20$, και η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας είναι μηδέν, να βρεθεί η κατανομή της θερμοκρασίας $u(t,x)$. Ποιά είναι η κατανομή της θερμοκρασίας για $t \to \infty$;

5. Θεωρείστε μια παλλόμενη χορδή μήκους $L = 10$ με σταθερά άκρα και $\alpha^2 = 1$. Αν η αρχική μετατόπιση είναι
   $$\phi(x) = \begin{cases} 4x/L, & 0 \leq x \leq L/4, \\ 1, & L/4 < x \leq 3L/4, \\ 4(L-x)/L, & 3L/4 \leq x \leq L, \end{cases}$$
   και η αρχική ταχύτητα μετατόπισης είναι μηδέν, να βρεθεί η συνάρτηση μετατόπισης $u(t,x)$.