9^o Εργαστήριο Διαφορικών Εξισώσεων

1. Να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'' + \alpha^2 y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^{t} g(\tau) \sin \alpha(t - \tau)\, d\tau.$$

2. Θεωρείστε μιά μεταλλική ράβδο με συντελεστή διάχυσης $\alpha^2 = 1$ μήκους 30. Θεωρούμε ότι η ράβδος θερμαίνεται από μια εξωτερική πηγή θερμότητας έντασης $f(x) = (30 - x)t$ και ότι τα άκρα της ράβδου είναι μονωμένα ώστε να έχουν μηδενικές θερμικές απώλειες. Αν η αρχική κατανομή της θερμοκρασίας είναι $u(0, x) = \cos^3 x$, να βρεθεί η θερμοκρασία $u(t, x)$.

3. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = \cos t \cos^2 x, \qquad && 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \\ &u_x(t, 0) = 0, \;\; u_x(t, \pi) = 0, && \\ &u(0, x) = 0, \;\; u_t(0, x) = \cos^4 x. && \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Στο πρόβλημα της χορδής, η συνθήκη $u_x = 0$ στα άκρα αντιστοιχεί σε ελεύθερο άκρο που κινείται σε οδηγό ώστε το συνολικό μήκος της χορδής να παραμένει σταθερό.

4. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = t \sin x + t^2 \cos 2x, \qquad && 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \\ &u_x(t, 0) = 0, \;\; u_x(t, \pi) = 0, && \\ &u(0, x) = \sin x \sin 3x, \;\; u_t(0, x) = 2 \cos 2x. && \end{aligned}$$