Θεωρία Βελτίστου Ελέγχου

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Εστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

   i) Η f είναι κυρτή.

   ii) $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$, για όλα τα $x, y \in dom(f)$.

   iii) $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ για όλα τα $x \in dom(f)$.

2. Να αποδείξετε ότι αν η διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $\nabla f(x^*) = 0$ για κάποιο σημείο x^* τότε αυτό αντιστοιχεί σε σημείο ολικού ελαχίστου. Η απόδειξη να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους.

3. Θεωρείστε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min f(x),\ x \in \Omega,$$

   όπου $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι αυστηρά κυρτή στο Ω και το Ω είναι ένα κυρτό σύνολο. Τότε αν υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο ελαχίστου αυτό είναι μοναδικό.

4. Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^T Ax + 2b^T x + c$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, $b \in \mathbb{R}^n$ και $c \in \mathbb{R}$. Τότε

   i) Το x είναι ένα κρίσιμο σημείο αν και μόνον αν $Ax = -b$,

   ii) Αν $A \succeq 0$, τότε το x είναι ένα ολικό ελάχιστο αν και μόνον αν $Ax = -b$,

   iii) Αν $A \succ 0$, τότε το $x = -A^{-1}b$ είναι ένα αυστηρό ολικό ελάχιστο.

5. Να επιλυθεί το πρόβλημα:

$$\begin{aligned} &\min\ 4x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 2x_2 \\ &\text{με}\quad 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ &\qquad\ \ x_1^2 \leq 1 \end{aligned}$$

   Να σχεδιάσετε το χωρίο ελαχιστοποίησης της συνάρτησης και να σημειώσετε το σημείο ελαχίστου.

6. Να επιλυθεί το πρόβλημα:

$$\begin{aligned} &\min\ -2x_1^2 + x_2^2 - x_1 + 4x_1 \\ &\text{με}\quad x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \\ &\qquad\ \ x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 3 \leq 0 \end{aligned}$$

   Να σχεδιάσετε το χωρίο ελαχιστοποίησης της συνάρτησης και να σημειώσετε το σημείο ελαχίστου.