Θεωρία Βελτίστου Ελέγχου

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Να μελετήσετε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης για το συναρτησιακό

$$J[x] = \int_0^1 x^2\dot{x}^2 dt, \tag{1}$$

με $x(0) = 1$ και $x(1) = 1$ δοκιμάζοντας τις συναρτήσεις $x_\varepsilon(t) = x^\varepsilon$ με $\varepsilon > \frac{1}{4}$. Μπορείτε να βρείτε ένα πάνω φράγμα της ελάχιστης τιμής του συναρτησιακού; Μπορείτε να πείτε ποιά είναι η βέλτιστη λύση; Αν σας ζητούσαν να μελετήσετε το αντίστοιχο πρόβλημα μεγίστου τι συμπέρασμα θα βγάζατε;

2. Να συμπληρώσετε την απόδειξη του θεωρήματος Legendre και να δείξετε ότι

$$\delta^2 J(x^*, \mu^\varepsilon) \geq \frac{\text{σταθερά}}{\varepsilon},$$

όπου

$$\mu^\varepsilon = \begin{cases} \sin^2 \frac{\pi(t-\tilde{t})}{\varepsilon} & \text{αν } t \in [\tilde{t}-\varepsilon, \tilde{t}+\varepsilon], \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

3. Να βρείτε μία πιθανή λύση για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού

$$J[x] = \int_0^1 \big(t\dot{x} + \dot{x}^2\big) dt, \tag{2}$$

με $x(0) = 1$ όπου α) $x(1)$ ελεύθερο ή β) $x(1) \geq 1$.

4. Να βρείτε μία πιθανή λύση για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού

$$J[x] = \int_1^{t_1} \big(t\dot{x}^2 + \sqrt{t}\dot{x}\big) dt, \tag{3}$$

όπου $x(1) = 0$ και $x(t_1) = t_1$.

5. Να βρείτε μία πιθανή λύση για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού

$$J[x] = \int_0^1 \big(x^2 + \dot{x}^2 + 2xe^t\big) dt, \tag{4}$$

όπου $x(0) = 0$ και $x(1) = e$. α) Να εξετάσετε αν αυτό είναι βέλτιστο β) ποιά είναι η μεταβολική μορφή δεύτερης τάξης; τι συμπέρασμα βγάζετε; γ) Μπορείτε να επιλύσετε την εξίσωση Jacobi;

6. (**Προαιρετική**) Να βρείτε μία πιθανή λύση για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού

$$J[x] = \int_0^1 \Big(\frac{1}{2}x^2 + x\dot{x} + x + \dot{x}\Big)dt, \tag{5}$$

όπου $x(0) = 1$ και $x(1) = 2$. α) Να εξετάσετε αν αυτό είναι βέλτιστο β) ποιά είναι η μεταβολική μορφή δεύτερης τάξης; τι συμπέρασμα βγάζετε; γ) Μπορείτε να επιλύσετε την εξίσωση Jacobi;

7. Να χρησιμοποιήσετε τις συνθήκες γωνιότητας για να επιλύσετε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$J[x] = \int_0^2 x^2(1-\dot{x})^2 dt, \tag{6}$$

όπου $x(0) = 0$ και $x(2) = 1$.

8. (**Προαιρετική**) Να χρησιμοποιήσετε τις συνθήκες γωνιότητας για να επιλύσετε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$J[x] = \int_0^1 (\dot{x}^2 + \dot{x}^3)dt, \tag{7}$$

όπου $x(0) = 0$ και $x(1) = 2$.