Το πρόβλημα του βελτίστου ελέγχου

Ενα πρόβλημα ελέγχου, θα μπορούσε να περιγραφεί μιά διαδικασία δοκιμής και λάθους (trial and error) όπου χρησιμοποιούμε επαναληπτικά διάφορες μεθόδους ανάλυσης γιά να καθορίσουμε τις παραμέτρους λειτουργίας ενός συστήματος.

Η διατύπωση ενός προβλήματος βελτίστου ελέγχου απαιτεί:

1. Τη μαθηματική περιγραφή της διαδικασίας (μαθηματικό μοντέλο) η εξέλιξη της οποίας καθορίζεται από έναν αριθμό συναρτήσεων ελέγχου
2. Τους φυσικούς περιορισμούς στους οποίους υπόκειται η διαδικασία
3. Καθορισμός ενός κριτηρίου απόδοσης (συνάρτηση αξίας)

Για το μαθηματικό μοντέλο, θεωρούμε ότι τό σύστημα μας βρίσκεται σε μιά κατάσταση που τη χρονική στιγμή t περιγράφεται από τις <u>μεταβλητές κατάστασης</u>

$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

Οι τιμές των $x_i(\cdot)$ ελέγχονται από τη συναρτήσεις ελέγχου

$u_1(t), \ldots, u_m(t)$.

Η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από τό σύστημα των δ.ε.

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t); u_1(t), \ldots, u_m(t))$$

$$\cdots$$

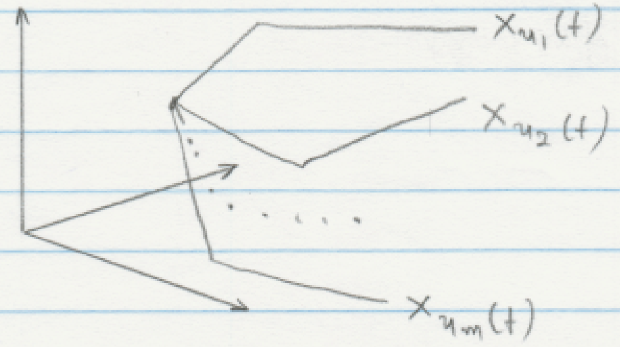
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t); u_1(t), \ldots, u_m(t))$$

Σε διανυσματική μορφή

$$\tilde{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad \tilde{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t)),$$

όπου

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)$$



Για κάθε $\tilde{u}(\cdot)$ βρίσκουμε την απόκριση του συστήματος και την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης αξίας (κριτήριο απόδοσης):

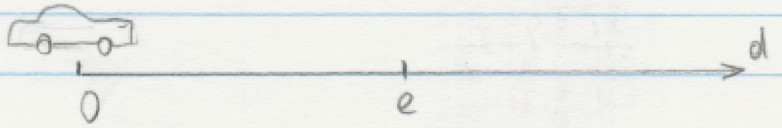
$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1(t), \ldots, x_n(t); u_1(t), \ldots, u_m(t))\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f_0(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)\, dt$$

<u>Σκοπός</u>: Να μεγιστοποιηθεί ή ελαχιστοποιηθεί το συναρτησιακό J ως πρός όλα τα $\tilde{u}(\cdot)$ με $\tilde{u}(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$

<u>Παρατήρηση</u>: Το U είναι συνήθως κλειστό και φραγμένο.

Παράδειγμα: Οδήγηση ενός αυτοκινήτου από τη



θέση 0 στη θέση e. Εχουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{d}(t) = \alpha(t) + b(t)$$

οπου

$\alpha(t)$: στιγμιαία επιτάχυνση λόγω κινητήρα
$b(t)$: στιγμιαία επιβράδυνση λόγω πέδησης

Ορίζουμε

$$x_1(t) = d(t) \quad \text{και} \quad x_2(t) = \dot{d}(t)$$

και

$$u_1(t) = \alpha(t) \qquad \text{και} \quad u_2(t) = b(t).$$

Οπότε οι εξισώσεις γράφονται στη μορφή

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

ή σε διανυσματική μορφή

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{u}(t)$$

Εχουμε τις εξής συνοριακές συνθήκες

$$x_1(t_0) = 0, \; x_1(t_f) = e \quad \text{και} \quad x_2(t_0) = 0 \;, \; x_2(t_f) = 0$$

ή

$$\tilde{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{x}(t_f) = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

Εχουμε τους φυσικούς περιορισμούς

$0 \le x_1(t) \le e$, $0 \le x_2(t)$ (δηλ. το όχημα δεν μπορεί να αλλάξει κατεύθυνση)

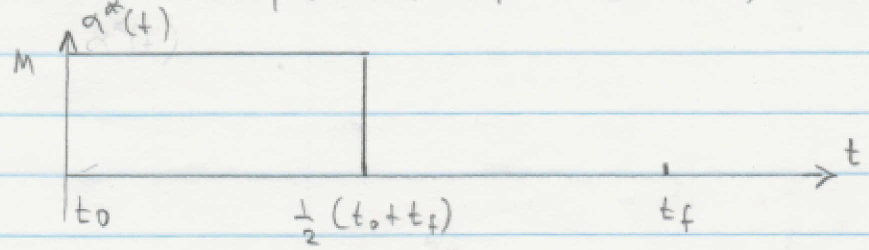
Επίσης το όχημα έχει μιά μέγιστη επιτάχυνση $M_1>0$ και μιά μέγιστη επιβράδυνση $M_2>0$ δηλ

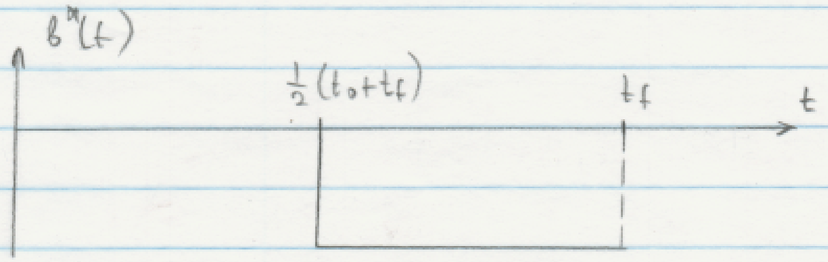
$$0\le u_1(t)\le M_1, \quad -M_2\le u_2(t)\le 0.$$

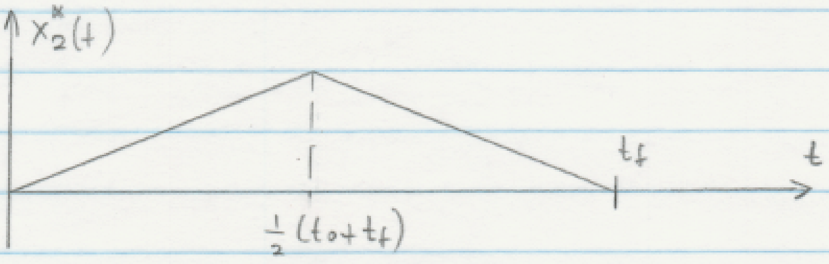
Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την κατανάλωση

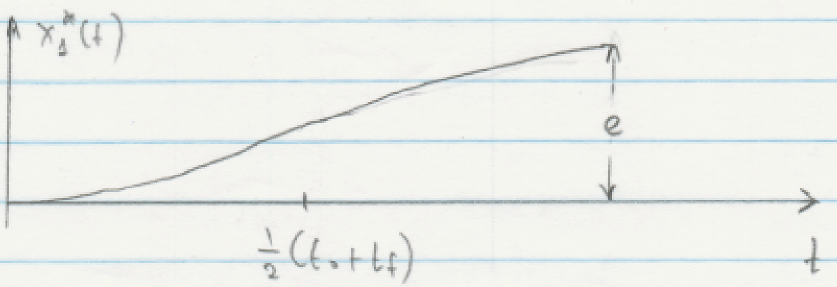
$$J=\int_{t_0}^{t_f}\left[k_1 \overset{\text{επιτάχυνση}}{u_1(t)} + k_2 \overset{\text{ταχύτητα}}{x_2(t)}\right]dt \le G$$

όπου υποθέτουμε ότι η κατανάλωση καυσίμου είναι ανάλογη της επιτάχυνσης και της ταχύτητας με συντελεστές αναλογίας k_1, k_2 αντίστοιχα και G είναι η συνολική χωρητικότητα του ρεζερβουάρ σε λίτρα.
Αν υποθέσουμε ότι $M_1=M_2=M$, τότε









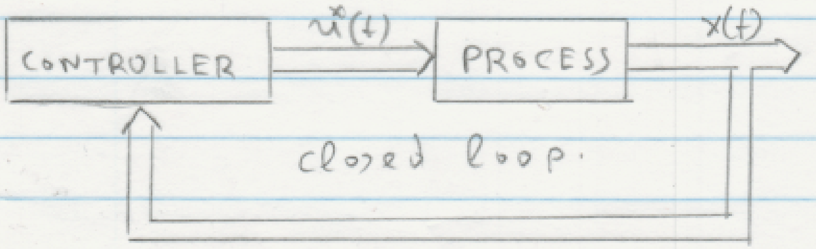
Αν ο βέλτιστος έλεγχος $u^*(\cdot)$ περιγράφεται από τη σχέση

$$\tilde{u}^*(t) = f(\tilde{x}^*(t), t)$$

τότε η f θα ονομάζεται <u>βέλτιστη</u> <u>πολιτική</u>

Πολλές φορές αντί του όρου optimal policy χρησιμοποιούμε τους όρους optimal feedback control ή closed_loop optimal control ή optimal control

Closed loop: Η δράση ελέγχου από τον ελεγκτή εξαρτάται από την κατάσταση $\tilde{x}(t)$ του συστήματος τη χρονική στιγμή t.



Open loop: Η δράση του βέλτιστου ελέγχου εξαρτάται μόνο από την αρχική κατάσταση του συστήματος δηλ $u^*(t) = g(\tilde{x}(t_0), t)$