Αναγκαίες συνθήκες για τό πρόβλημα βελτίστου ελέγχου (διαισθητικές αποδείξεις).

Υποθέτουμε ότι οι βέλτιστοι έλεγχοι $u(t)$ είναι συναρτήσεις που παίρνουν τιμές σε ένα διάστημα $[u_0, u_1] = U$

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} \max\limits_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)\,dt \quad , \quad u(t) \in U \\ \\ \dot{x}(t) = u(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) \text{ ελεύθερο.} \end{cases}$$

Πρέπει να βρούμε ένα ζευγάρι $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ που μεγιστοποιεί το παραπάνω ολοκλήρωμα. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο ζευγάρι. Θεωρούμε μιά ισχυρή μεταβολή του $u^*(\cdot)$:

$$\begin{cases} u(t) = u \ , \quad t \in [s-\delta, s] = I \\ u(t) = u^*(t) \quad \text{γιά} \quad t \notin I, \end{cases} \qquad (1)$$

με $s \in (t_0, t_1]$ και u μιά τυχαία τιμή από το $[u_0, u_1]$.
Αν $f_0^* = f_0(x^*(t), u^*(t), t)$, $f_0 = f_0(x(t), u(t), t)$, θεωρούμε τη διαφορά

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} f_0\,dt - \int_{t_0}^{t_1} f_0^*\,dt = \underbrace{\int_{t_0}^{s-\delta} (f_0 - f_0^*)\,dt}_{=0} + \int_{s-\delta}^{s} (f_0 - f_0^*)\,dt + \int_{s}^{t_1} (f_0 - f_0^*)\,dt$$

$$= \int_{s-\delta}^{s} \left[f_0(x(t), u, t) - f_0(x^*(t), u^*(t), t)\right] dt + \int_{s}^{t_1} \left[f_0(x(t), u^*(t), t) - f_0(x^*(t), u^*(t), t)\right] dt$$

$$= \Delta_1 J + \Delta_2 J$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η αλλαγή της τιμής του u στο διάστημα I επηρεάζει τις τιμές που παίρνει η $x(t)$ και συνεπώς τις τιμές του ολοκληρώματος $\int_{t_0}^{t_1} f(x(t), u(t), t)\, dt$.

Εχουμε

$$\Delta x(t) = x(t) - x^*(t) = \int_{t_0}^{t} (u(s) - u^*(s))\, ds = \int_{s-\delta}^{s} (u - u^*(s))\, ds \approx$$

$$\approx [u - u^*(s)]\,\delta \qquad (2)$$

<u>Για τον υπολογισμό του $\Delta_1 J$</u>:

$$\Delta_1 J = \int_I (f_0 - f_0^*)\, dt = \int_I [f_0(x(t), u, t) - f_0(x^*(t), u^*(t), t)$$

$$+ f_0(x^*(t), u, t) - f_0(x^*(t), u, t)]\, dt$$

$$= \int_{s-\delta}^{s} [f_0(x(t), u, t) - f_0(x^*(t), u, t)]\, dt + \int_{s-\delta}^{s} [f_0(x^*(t), u, t) - f_0(x^*(t), u^*(t), t)]\, dt$$

$$\approx \int_{s-\delta}^{s} f_{0x}(x^*(t), u, t)\, \Delta x(t)\, dt + \int_{s-\delta}^{s} [f_0(x^*(s), u, s) - f_0(x^*(s), u^*(s), s)]\, dt$$

$$\approx [u - u^*(s)]\,\delta \underbrace{\int_{s-\delta}^{s} f_{0x}(x^*(t), u, t)\, dt}_{O(\delta)} + [f_0(x^*(s), u, s) - f_0(x^*(s), u^*(s), s)]\,\delta$$

$$= [f_0(x^*(s), u, s) - f_0(x^*(s), u^*(s), s)]\,\delta$$

$$\Delta_2 J = \int_s^{t_1} (f_0 - f_0^*)\, dt \approx \int_s^{t_1} [f_0(x(t), u^*(t), t) - f_0(x^*(t), u^*(t), t)]\, dt$$
$$\approx \int_s^{t_1} f_{0x}(x^*(t), u^*(t), t)\, \Delta x(t)\, dt \approx [u - u^*(s)]\,\delta \int_s^{t_1} f_{0x}^*(t)\, dt$$

Συνεπώς

$$\Delta J \approx [f_0(x^*(s), u, s) - f_0(x^*(s), u^*(s), s)]\,\delta + [u - u^*(s)]\,\delta \int_s^{t_1} f_{0x}^*(t)\, dt$$

Ορίζουμε
$$p(s) = \int_s^{t_1} f_{0x}^*(t)\, dt,$$

οπότε επειδή $\Delta J \leq 0$, έχουμε

$$[f_0(x^*(s), u, s) - f_0(x^*(s), u^*(s), s)] + [u - u^*(s)]\, p(s) \leq 0. \quad (3)$$

Ορίζουμε τη Χαμιλτωνιανή
$$H(x, u, p, t) = f_0(x, u, t) + pu.$$
Οπότε από την (3)
$$H(x^*(s), u, p(s), s) \leq H(x^*(s), u^*(s), p(s), s),$$
δηλ. γιά όλα τα s
$$\max_{u \in U} H(x^*(s), u, p(s), s) = H(x^*(s), u^*(s), p(s), s), \quad (4)$$
όπου η συζυγής μεταβλητή $p(s)$, δίνεται από τη σχέση:
$$\begin{cases} \dot{p} = -f_{0x}(x^*(s), u^*(s), s) = -H_x(x^*(s), u^*(s), p(s), s) \\ p(t_1) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Οι σχέσεις (4) και (5) αποτελούν αναγκαίες συνθήκες γιά να υπάρχει το βέλτιστο ζευγάρι $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$.

Θεωρούμε το πιο γενικό πρόβλημα:

$$\begin{cases} \max\limits_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t),u(t),t)\,dt & u(t)\in U \\ x'(t)=f(x(t),u(t),t), & x(t_0)=x^0, \quad x(t_1) \text{ ελεύθερο} \end{cases}$$

Εδώ διαφέρει ο υπολογισμός του $\Delta x(t) \equiv x(t)-x^*(t)$.
Πράγματι

$$\Delta x(t)=\int_{t_0}^{t} f\,d\tau-\int_{t_0}^{t} f^*\,d\tau=\int_{s-\delta}^{s}(f-f^*)\,d\tau+\int_{s}^{t}(f-f^*)\,d\tau$$

Επομένως γιά $\tau\in(s,t_1]$, έχουμε

$$f(\tau)-f^*(\tau)=f(x(\tau),u^*(\tau),\tau)-f(x^*(\tau),u^*(\tau),\tau)\approx f_x^*(\tau)\,\Delta x(\tau)$$

Επομένως, γιά $t>s$,

$$\Delta x(t)\approx\int_{s-\delta}^{s}(f-f^*)\,d\tau+\int_{s}^{t} f_x^*(\tau)\,\Delta x(\tau)\,d\tau,$$

έχουμε

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t)=f_x^*(t)\,\Delta x(t), \quad \Delta x(s)=\int_{s-\delta}^{s}(f-f^*)\,d\tau\approx c_1\delta \qquad (6)$$

όπου

$$c_1 = f(x^*(s),u,s)-f^*(s).$$

Λύνουμε το αρχικό πρόβλημα τιμών (6), οπότε

$$\Delta x(t)=c_1\delta\cdot\exp\int_{s}^{t} f_x^*(\tau)\,d\tau \qquad (7)$$

Όπως και στην απλούστερη περίπτωση

$$\Delta J = \Delta J_1 + \Delta J_2 \simeq [f_0(x^*(s), u, s) - f_0(x^*(s), u^*(s), s)]\delta$$

$$+ \int_s^{t_1} f_{0x}(x^*(t), u^*(t), t)\, \Delta x(t)$$

Οπότε από την (7), έχουμε

$$\Delta J = [f_0(x^*(s), u, s) - f_0(x^*(s), u^*(s), s)]\delta$$

$$+ \int_s^{t_1} f_{0x}^*(t)\, c_1\, \delta \cdot \exp\left(\int_s^t f_x^*(\tau)\, d\tau\right) dt$$

$$= [f_0(x^*(s), u, s) - f_0^*(s)]\delta + p(s)[f(x^*(s), u, s) - f^*(s)]\delta$$

οπου

$$p(s) = \int_s^{t_1} f_{0x}^*(t) \exp\left(\int_s^t f_x^*(\tau)\, d\tau\right) dt$$

με την $p(\cdot)$ να επιλύει το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\dot{p} = -f_{0x}^*(t) - p(t) f_x^*(t), \quad p(t_1) = 0. \quad (8)$$

Ορίζουμε τη χαμιλτωνιανή

$$H(x, u, p, t) = f_0(x, u, t) + p f(x, u, t).$$

Οπότε επειδή $\Delta J \leq 0$, έχουμε

$$H(x^*(s), u, p(s), s) \leq H(x^*(s), u^*(s), p(s), s).$$

<u>Συμπέρασμα</u> Έχουμε τις παρακάτω αναγκαίες συνθήκες

$$\begin{cases} \max_{u \in U} H(x^*(s), u, p(s), s) = H(x^*(s), u^*(s), p(s), s) \\ \dot{p} = -H_x(x^*(t), u^*(t), p(t), t), \quad p(t_1) = 0 \end{cases}$$