ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Εστω $\mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών. Στο $\mathbb{N}_{>0}$ ορίζομε τις παρακάτω σχέσεις:
$\mathcal{R}_1$, με $a\mathcal{R}_1 b$ αν το a είναι πολλαπλάσιο του b.
$\mathcal{R}_2$, με $a\mathcal{R}_2 b$ αν το a είναι μικρότερο κατά μία μονάδα του b.
$\mathcal{R}_3$, με $a\mathcal{R}_3 b$ αν το a έχει το ίδιο πλήθος ψηφίων με το b.
Βρείτε ποιές από τις σχέσεις είναι α) ανακλαστικές, β) συμμετρικές, γ) μεταβατικές.

Πρόβλημα 2. Βρείτε ποιές από τις παρακάτω σχέσεις στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ ορίζουν σχέσεις ισοδυναμίας. Γιά κάθε μιά από τις τελευταίες περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.
α) $\mathcal{R}_1$, με $x\mathcal{R}_1 y$ αν $x \geq y$.
β) $\mathcal{R}_2$, με $x\mathcal{R}_2 y$ αν $|x| = |y|$.
γ) $\mathcal{R}_3$, με $x\mathcal{R}_3 y$ αν $|x - y| \leq 3$.

Πρόβλημα 3. Εστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών. Ορίζουμε $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$. Στο $\mathbb{Q}^*$ ορίζουμε την σχέση $\mathcal{R}$ ως εξής:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}.$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρεθεί η κλάση ισοσυναμίας του στοιχείου $5/2 \in \mathbb{Q}^*$.

Πρόβλημα 4. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε την σχέση $\sim$ ως εξης: $a \sim b \Longleftrightarrow b - a \in \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε το σύνολο πηλίκο $\mathbb{C}/\sim$.

Πρόβλημα 5. Στο σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε την σχέση $\sim$ ως εξής: $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2) \Longleftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1$.
α) Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
β) Βρείτε την κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου (m_1, m_2).
γ) Περιγράψτε το σύνολο πηλίκο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$.

Πρόβλημα 6. Εστω $f : X \longrightarrow Y$ απεικόνιση. Να αποδειχθεί ότι:
α) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, όπου $B_1, B_2 \subseteq Y$.
β) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, όπου $B_1, B_2 \subseteq Y$.
γ) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$, όπου $A_1, A_2 \subseteq X$.
δ) Ισχύει ότι $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;

Πρόβλημα 7. Εστω $f : X \longrightarrow Y$ απεικόνιση. Να αποδειχθεί ότι:
α) Για κάθε υποσύνολο A του X, ισχύει $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
β) Για κάθε υποσύνολο B του Y, ισχύει $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Πρόβλημα 8. Εστω $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ απεικονίσεις. Να αποδειχθεί ότι:

α) Αν η $g \circ f$ είναι 1-1 τότε η f είναι 1-1.
β) Αν η $g \circ f$ είναι επί τότε η g είναι επί.

Πρόβλημα 9. Εστω $X = \{2, 3, 4\}$ και $Y = \{1, 2, 4, 5\}$.
α) Πόσες 1-1 απεικονίσεις υπάρχουν από το X στο Y;
β) Πόσες επί απεικονίσεις υπάρχουν από το Y στο X;

Πρόβλημα 10. Εστω $f : X \longrightarrow Y$ απεικόνιση. Να αποδειχθεί ότι:
α) Υπάρχει απεικόνιση $g : Y \longrightarrow X$ με $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ εάν και μόνον εάν η f είναι επί.
β) Υπάρχει απεικόνιση $h : Y \longrightarrow X$ με $h \circ f = \mathrm{id}_X$ εάν και μόνον εάν η f είναι 1-1.