

ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 10

Πρόβλημα 1. Έστω R δακτύλιος και $R[x]_0$ το υποσύνολο του $R[x]$ που περιέχει τα πολυώνυμα με σταθερό όρο μηδέν (δηλ. $a_0 = 0$). Δείξτε ότι το $R[x]_0$ είναι υποδακτύλιος του $R[x]$.

Πρόβλημα 2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$ (συμβολίζουμε, για συντομία, με \bar{a} το στοιχείο $a \bmod 5$ του δακτυλίου \mathbb{Z}_5):

α) $(-\bar{4} + x + \bar{3}x^2)(\bar{3} - x + \bar{3}x^2)$.

β) $(\bar{1} - \bar{2}x^2 + \bar{3}x^6)(\bar{2} + \bar{2}x + \bar{7}x^2)$.

Πρόβλημα 3. α) Βρείτε όλα τα αντιστρέψιμα στοιχεία των δακτυλίων $\mathbb{Z}[x]$ και $\mathbb{Z}_5[x]$.

β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $\bar{3} + \bar{2}x + \bar{2}x^2$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του δακτυλίου $\mathbb{Z}_4[x]$, όπου με \bar{a} συμβολίζουμε το στοιχείο $a \bmod 4$ του δακτυλίου \mathbb{Z}_4 .

Πρόβλημα 4. Έστω F σώμα. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $F[x]$ δεν είναι σώμα.

Πρόβλημα 5. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $f(x)$ του $\mathbb{Z}[x]$ που ικανοποιούν την συνθήκη $f(x) = f(-x)$. Ομοίως, να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα του $\mathbb{Z}_2[x]$ που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη.

Πρόβλημα 6. Έστω $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$.

α) Δείξτε ότι αν $r \in \mathbb{Z}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$, τότε $r \mid a_0$.

β) Δείξτε ότι αν $\xi = p/q \in \mathbb{Q}$, με $(p, q) = 1$, είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$ στο \mathbb{Q} , τότε $q \mid a_n$ και $p \mid a_0$.

γ) Έστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ έχει ρίζα στο \mathbb{Q} . Δείξτε τότε ότι έχει ρίζα και στο \mathbb{Z} .

Πρόβλημα 7. Πόσα πολυώνυμα βαθμού ≤ 2 περιέχει ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_3[x]$;

Πρόβλημα 8. Έστω $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ τέτοιο ώστε $f(0)$ και $f(1)$ είναι περιττοί ακέραιοι. Δείξτε ότι το $f(x)$ δεν έχει ρίζα στο \mathbb{Z} .

Πρόβλημα 9. Με χρήση του θεωρήματος του Fermat, βρείτε όλες τις ρίζες (στο σώμα \mathbb{Z}_5) του πολυωνύμου $\bar{2}x^{219} + \bar{3}x^{74} + \bar{2}x^{57} + \bar{3}x^{44} \in \mathbb{Z}_5[x]$ (συμβολίζουμε, για συντομία, με \bar{a} το στοιχείο $a \bmod 5$ του δακτυλίου \mathbb{Z}_5).