ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 11

Στα παρακάτω προβλήματα συμβολίζουμε ως $\bar{a}$ το στοιχείο $a \mathrm{mod} m$ τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_m$.

Πρόβλημα 1. α) Ειναι το $x^2+\bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;
β) Ειναι το $x^2+\bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;
γ) Είναι το $x^3+x+\bar{2}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;
δ) Είναι το $x^3-\bar{3}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_7[x]$;
ε) Είναι το $x^3+x+\bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι το $x-\bar{1}$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x)$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$, αν και μόνον αν, το $f(x)$ έχει έναν άρτιο αριθμό μη μηδενικών συντελεστών.

Πρόβλημα 3. Βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 4 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$.

Πρόβλημα 4. Γράψτε το πολυώνυμο $\bar{2}x^3+x^2+\bar{2}x+\bar{2}$ ως γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι το πολυώνυμο x^4-22x^2+1 είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

Πρόβλημα 6. Να βρεθεί ο μ.κ.δ.$(f(x),g(x))$ των παρακάτω πολυωνύμων τού $\mathbb{Q}[x]$ και να εκφραστεί στην μορφή μ.κ.δ.$(f(x),g(x))=\alpha(x)f(x)+\beta(x)g(x)$.
α) $f(x)=x^3-3x^2+3x-2,\ \ g(x)=x^2-5x+6$.
β) $f(x)=x^5+3x^2+1,\ \ g(x)=x^2-1$.

Πρόβλημα 7. Να βρεθεί ο μ.κ.δ.$(f(x),g(x))$ των πολυωνύμων $f(x)=x^{12}+1,\quad g(x)=x^9+1$ τού $\mathbb{Z}_3[x]$ και να εκφραστεί στην μορφή μ.κ.δ.$(f(x),g(x))=\alpha(x)f(x)+\beta(x)g(x)$.

Πρόβλημα 8. Βρείτε αν τα παρακάτω πολυώνυμα ικανοποιούν το κριτήριο τού Eisenstein.
α) $8x^3+6x^2-9x+24$.
β) $2x^{10}-25x^3+10x^2-30$.

Πρόβλημα 9. Να διαιρέσετε το x^5-x^3+3x-5 με το x^2+7, θεωρώντας τα ως πολυώνυμα:
α) τού $\mathbb{Z}[x]$,
β) τού $\mathbb{Z}_3[x]$,
γ) τού $\mathbb{Z}_5[x]$.