

## ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 2

**Πρόβλημα 1.** Στο σύνολο  $\mathbb{N}$  των φυσικών αριθμών ορίζουμε την απεικόνιση  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  με  $f(n) = 2n$ . Εξετάσατε αν υπάρχουν απεικονίσεις  $g_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  και  $g_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  για τις οποίες να ισχύει ότι  $g_1 \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$  και  $f \circ g_2 = \text{id}_{\mathbb{N}}$ . Είναι η απεικόνιση  $f$  αντιστρέψιμη;

**Πρόβλημα 2.** Εστω  $\star$  μια (διμελής) πράξη στο σύνολο  $A$  η οποία έχει ουδέτερο στοιχείο και για την οποία ισχύει ότι  $a \star (b \star c) = (a \star c) \star b$ , για κάθε  $a, b, c \in A$ . Να αποδειχθεί ότι η πράξη  $\star$  είναι προσεταιριστική και αντιμεταθετική.

**Πρόβλημα 3.** Για ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η  $\star$  ορίζει διμελή πράξη;

- α) Στο σύνολο των φυσικών  $\mathbb{N}$  με  $a \star b = a + b$
- β) Στο σύνολο των φυσικών  $\mathbb{N}$  με  $a \star b = a - b$
- γ) Στο σύνολο των φυσικών  $\mathbb{N}$  με  $a \star b = a^b$
- δ) Στο σύνολο των ρητών  $\mathbb{Q}$  με  $a \star b = a^b$

**Πρόβλημα 4.** Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω ζεύγη συνιστούν ομάδα:

- α)  $(\{-1, 1\}, \cdot)$
- β)  $(\{-1, 0, 1\}, +)$
- γ)  $(A, +)$ , όπου  $A = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ συνεχής συνάρτηση}\}$
- δ)  $(A, \cdot)$ , όπου  $A$  όπως στο γ).

**Πρόβλημα 5.** Εστω  $X$  σύνολο. Συμβολίζουμε με  $\mathcal{P}(X)$  το σύνολο των υπο-συνόλων του  $X$ . Στο  $\mathcal{P}(X)$  ορίζουμε τις πράξεις “+” και “ $\cdot$ ” ως εξής:

$$A + B = A \cup B - A \cap B$$

$$A \cdot B = A \cap B.$$

Δείξτε ότι με τις παραπάνω πράξεις ο  $\mathcal{P}(X)$  αποτελεί αντιμεταθετικό δακτύλιο με μοναδιαίο στοιχείο. Είναι ο παραπάνω δακτύλιος ακέραια περιοχή;

$$\text{Υπόδειξη: } A + (B + C) = ((A \cup B \cup C) - ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))) \cup (A \cap B \cap C).$$

**Πρόβλημα 6.** Εστω  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{m + n\sqrt{2}, m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών αριθμών ορίζουν (επάγουν) πράξεις στο  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  και ότι το  $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$  είναι ακέραια περιοχή.

**Πρόβλημα 7.** Εστω  $(\mathcal{M}(2, \mathbb{Z}), +, \cdot)$  ο δακτύλιος των  $2 \times 2$  πινάκων με στοιχεία στο  $\mathbb{Z}$ . Ποιά είναι τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου;