ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3

Πρόβλημα 1. Εφαρμόστε τον Ευκλείδειο αλγόριθμο (δηλ. κάνετε την διαίρεση του a με το b) στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $a = -327$, $b = 12$.
β) $a = 453$, $b = -8$.
γ) $a = -372$, $b = -11$.

Πρόβλημα 2. Βρείτε τον $d =$ μ.κ.δ.$(1147, 851)$. Γράψτε τον d στην μορφή $d = 1147\,x + 851\,y$ γιά κάποιους ακέραιους x, y.

Πρόβλημα 3. Εστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι αν $(a, c) = 1$ και μ.κ.δ.$(b, c) = d$ τότε μ.κ.δ.$(ab, c) = d$.

Πρόβλημα 4. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι $(5n + 1, 21n + 4) = 1$.

Πρόβλημα 5. Εστω $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$.
α) Αν $k \neq 0$, δείξτε ότι μ.κ.δ.$(ka, kb) = |k|$ μ.κ.δ.(a, b).
β) Δείξτε ότι αν $(a, k) = (b, k) = 1$ τότε $(ab, k) = 1$
γ) Δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(a, c) = d, a|b$ και $c|b$ τότε $ac|bd$.
δ) Αν $(b, c) = 1$ τότε δείξτε ότι μ.κ.δ.$(ab, c) =$ μ.κ.δ.(a, c).
ε) Αν $(ab, c) = 1$ τότε δείξτε ότι $(a, c) = 1$ και $(b, c) = 1$.

Πρόβλημα 6. Εστω $m, n \in \mathbb{N}$ με $(m, n) = 1$. Δείξτε ότι μ.κ.δ.$(m+n, m-n) = 1$ ή 2.

Πρόβλημα 7. Χρησιμοποιήσατε την Ευκλείδεια διαίρεση για να δείξετε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 1$ γράφεται ως άθροισμα δυνάμεων του 2, δηλ. $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s}$, για κάποιους φυσικούς k_i με $0 \leq k_s \leq \ldots \leq k_2 \leq k_1$.

Πρόβλημα 8. **α)** Αποδείξτε ότι κάθε πρώτος αριθμός $p \geq 3$ γράφεται στην μορφή $p = 4n + 1$ ή $p = 4n + 3$, όπου $n \in \mathbb{N}$.
β) Αποδείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός της μορφής $4m + 3$ έχει έναν πρώτο διαιρέτη της μορφής $4n+3$. Ισχύει κάτι ανάλογο όταν ο φυσικός είναι της μορφής $4m+1$;

Πρόβλημα 9. **α)** Εστω p πρώτος αριθμός και $a \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι αν $p|a^2$ τότε $p|a$. Ισχύει το ίδιο αν ο p δεν είναι πρώτος αριθμός;
β) Εστω $m, n \in \mathbb{N}$ με μ.κ.δ.$(m, n) = 1$. Υποθέτουμε ότι $mn = k^2$, γιά κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $m = a^2$ και $n = b^2$. Ισχύει το ίδιο αν βγάλουμε την υπόθεση μ.κ.δ.$(m, n) = 1$;

Πρόβλημα 10. **α)** Εστω $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq 1$. Δείξτε ότι $2^n - 1|2^{nm} - 1$. Συμπεράνατε ότι αν $2^n - 1$ είναι πρώτος αριθμός τότε και ο n είναι πρώτος.
β) Εστω $k, r \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $2^{2^r} + 1|2^{2^r(2k+1)} + 1$. Συμπεράνατε ότι αν ο $2^n + 1$ είναι πρώτος αριθμός τότε το n είναι μιά δύναμη του 2.

Πρόβλημα 11. Εστω $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$.
α) Δείξτε ότι αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του m με το n είναι r, δηλ. $m = qn + r$ με $0 \leq r < n$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $2^m - 1$ με τον $2^n - 1$ είναι $2^r - 1$. (*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι το $2^{qn} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του $2^n - 1$).
β) Βασιζόμενοι στην εύρεση του μ.κ.δ. με χρήση του Ευκλείδειου αλγόριθμου, δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(m, n) = d$ τότε μ.κ.δ.$(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^d - 1$.

Πρόβλημα 12. Βρείτε τον $d =$ μ.κ.δ.$(144, 625)$ χρησιμοποιόντας ι) την Ευκλείδεια διαίρεση και ιι) την ανάλυση των 144 και 625 σε πρώτους αριθμούς.