ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4

Πρόβλημα 1. Εστω $(G, \cdot)$ ομάδα και έστω e το ταυτοτικό της στοιχείο. Αν κάθε στοιχείο $a \in G$ ικανοποιεί την σχέση $a \cdot a = e$ δείξτε ότι η ομάδα G είναι αβελιανή.

Πρόβλημα 2. Εστω T ισόπλευρο τρίγωνο και έστω O το σημείο τομής των μεσοκαθέτων του. Εστω $\sigma_0 : T \longrightarrow T$ η ταυτοτική απεικόνιση και $\sigma_1 : T \longrightarrow T$ (αντιστ. $\sigma_2 : T \longrightarrow T$) η απεικόνιση που αντιστοιχεί σε στροφή 60^0 (αντιστ. 120^0) με κέντρο O. Εστω, επίσης, $\tau_i : T \longrightarrow T,\ i = 1, 2, 3$, οι απεικονίσεις που αντιστοιούν στις ανακλασεις τού τριγώνου με άξονες τις τρεις μεσοκαθέτους. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων αποτελεί ομάδα και βρείτε τον πίνακα πράξης της.

Πρόβλημα 3. Εστω $n, m \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $n\mathbb{Z} \leq m\mathbb{Z}$ εάν και μόνον εάν $m|n$.

Πρόβλημα 4. Εστω $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση$\}$ και $F^\star = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ συνάρτηση$\}$. Στό F ορίζομε πράξη $+$ μέσω της σχέσης $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ και στο $F^\star$ πράξη $\cdot$ μέσω της σχέσης $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Δείξτε ότι $(F, +)$ και $(F^\star, \cdot)$ είναι ομάδες. Εν συνεχεία, θεωρήστε τα εξής σύνολα:

$$\begin{aligned}
A &= \{f \in F \,:\, f(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}. \\
B &= \{f \in F \,:\, f(1) = 0\}. \\
C &= \{f \in F \,:\, f(0) = 1\}. \\
D &= \text{το σύνολο των σταθερών μη μηδενικών συναρτήσεων.}
\end{aligned}$$

Ποιά από τα παραπάνω σύνολα ορίζουν υποομάδες τής $(F, +)$ και ποιά τής $(F^\star, \cdot)$.

Πρόβλημα 5. Εστω $(G, \cdot)$ ομάδα και έστω a στοιχείο τής G. Δείξτε ότι το $H_a := \{g \in G, \text{όπου } ag = ga\}$ είναι υποομάδα τής G.

Πρόβλημα 6. Εστω $(G, \cdot)$ ομάδα με άρτια το πλήθος στοιχεία. Δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο a τής ομάδας, που δεν είναι το ουδέτερο, με την ιδιότητα $a = a^{-1}$.

Πρόβλημα 7. Εξετάσατε ποιές από τις παρακάτω ομάδες είναι κυκλικές.
α) $(\mathbb{R}, +)$.
β) $(\{+1, -1\}, \cdot)$.
γ) $(M(2, \mathbb{Z}), +)$ (βλ. φυλλάδιο 2, άσκηση 7).

Πρόβλημα 8. Εστω $a, b \in \mathbb{N},\ a, b \neq 0$.
α) Ορίζουμε $S = \{t \in \mathbb{Z},\ \text{όπου } a|t \text{ και } b|t\}$. Δείξτε ότι το S είναι υποομάδα της $\mathbb{Z}$ (με πράξη την πρόσθεση).
β) Με βάση την θεωρία, θα πρέπει να υπάρει ένας φυσικός $e \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $S = e\,\mathbb{Z}$. Ο e λέγεται το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των a, b. Δικαιολογίστε την ορολογία, δηλ. δείξτε ότι ο παραπάνω φυσικός e είναι ο ελάχιστος των κοινών πολλαπλασίων

των a και b.
γ) Αν $a = q_1^{r_1} \dots q_k^{r_k} \dots$ και $b = q_1^{s_1} \dots q_k^{s_k} \dots$ οι αναλύσεις των a και b σε πρώτους (σύμφωνα με τον συμβολισμό τού μαθήματος), δείξτε ότι $e = q_1^{\mu_1} \dots q_k^{\mu_k} \dots$, όπου $\mu_i =$ μέγιστο(r_i, s_i).
δ) Εστω $d =$ μ.κ.δ.(a, b). Δείξτε ότι $e \cdot d = a \cdot b$.

Πρόβλημα 9. **α)** Εστω G ομάδα και K, L υποομάδες της G. Δείξτε ότι $K \cap L$ είναι υποομάδα τής G.
β) Εστω $n, m \in \mathbb{N}$. Εκφράστε την $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ στην μορφή $e\,\mathbb{Z}$, γιά κάποιο $e \in \mathbb{N}$

Πρόβλημα 10. Εστω G κυκλική ομάδα με άπειρη τάξη. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα τής G που είναι $\neq \{e\}$ έχει άπειρη τάξη. Ισχύει το ίδιο αν η G έχει άπειρη τάξη αλλά δεν είναι κυκλική;