ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε ότι, άν οι μόνες υποομάδες μιάς ομάδας G είναι η ίδια η ομάδα (δηλ. η μή γνήσια υποομάδα τής G) και αυτή που αποτελείται μόνο από το ουδέτερο στοιχείο (δηλ. η τετριμμένη υποομάδα της G), τότε η ομάδα G είναι, υποχρεωτικά, κυκλική.

Πρόβλημα 2. Γιά n θετικό ακέραιο, έστω U_n η πολλαπλασιαστική ομάδα των n-οστών μιγαδικών ριζών τής μονάδος. Βρείτε, ποιά υποομάδα τής U_n παράγει το στοιχείο ζ, στίς ακόλουθες περιπτώσεις:
(α′) $n = 6$, $\zeta = \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6}$,
(β′) $n = 6$, $\zeta = \cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}$,
(γ′) $n = 12$, $\zeta = \cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12}$,
(δ′) $n = 12$, $\zeta = \cos\frac{6\pi}{12} + i\sin\frac{6\pi}{12}$,
(ε′) $n = 12$, $\zeta = \cos\frac{10\pi}{12} + i\sin\frac{10\pi}{12}$.

Πρόβλημα 3. Βρείτε την κυκλική υποομάδα τής πολλαπλασιαστικής ομάδας των 4×4 αντιστρεψίμων πινάκων, την οποία παράγει (χωριστά) καθένας από τούς παρακάτω πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι μια κυκλική ομάδα με έναν μόνον γεννήτορα μπορεί να έχει το πολύ δύο στοιχεία.

Πρόβλημα 5. Εστω $\mathbb{C}^\star$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Βρείτε την τάξη των κυκλικών υποομάδων τής $\mathbb{C}^\star$ που παράγονται από τα στοιχεία: i, $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $1 + i$. Σε κάθε μιά από τις παραπάνω περιπτώσεις βρείτε όλους τούς γεννήτορες των κυκλικών υποομάδων.

Πρόβλημα 6. Εστω $G =< a >$ κυκλική ομάδα τάξης n. Δείξτε ότι αν $a^m = e$ τότε $n \mid m$.

Πρόβλημα 7. Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα και $g \in G$ στοιχείο τάξεως n. Αποδείξτε ότι η σχέση $g^x = g^y$, όπου x, y ακέραιοι, ισοδυναμεί με το ότι ο $x - y$ είναι πολλαπλάσιο τού n.

Πρόβλημα 8. Έστω $(G, \cdot)$ κυκλική ομάδα τάξεως n και m θετικός διαιρέτης τού n. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^m = e$ (e το ουδέτερο στοιχείο) έχει ακριβώς m λύσεις $x \in G$. (Ὑπόδειξη: Ἔστω g γεννήτορας τής G. Χρησιμοποιείστε το πρόβλημα 6.)