

ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 6

Πρόβλημα 1. Για τις ομάδες \mathbb{Z}_3 και \mathbb{Z}_6 :

- α) Βρείτε τον πίνακα πράξης τους.
- β) Βρείτε όλους τους γεννήτορες των παραπάνω ομάδων.
- γ) Βρείτε όλες τις (διαφορετικές) υποομάδες τους.
- δ) Βρείτε την τάξη όλων των στοιχείων τους.
- ε) Βρείτε τα αντίστροφα (αντίθετα) όλων των στοιχείων τους.

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι αν το p είναι πρώτος αριθμός τότε οι μόνες υποομάδες της ομάδας \mathbb{Z}_p είναι η τετριμμένη και η μή γνήσια.

Πρόβλημα 3. α) Ναδειχθεί ότι η τάξη του στοιχείου $a \bmod n$ στην ομάδα \mathbb{Z}_n ισούται με $\frac{n}{\mu.χ.δ.(n,a)}$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήσατε τον χαρακτηρισμό της τάξης στοιχείου που έχουμε μάθει και την ανάλυση σε πρώτους αριθμούς).

β) Ποιά η τάξη της υποομάδας της \mathbb{Z}_{30} που γεννιέται από το $25 \bmod 30$;

γ) Ποιά η τάξη της υποομάδας της \mathbb{Z}_{42} που γεννιέται από το $30 \bmod 42$;

Πρόβλημα 4. α) Εστω p, q πρώτοι αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους. Βρείτε τον αριθμό των γεννητόρων της κυκλικής ομάδας \mathbb{Z}_{pq} .

β) Εστω p πρώτος αριθμός. Βρείτε τον αριθμό των γεννητόρων της κυκλικής ομάδας \mathbb{Z}_{p^r} , όπου $r \geq 1$ φυσικός αριθμός.

Πρόβλημα 5. Εστω G αβελιανή ομάδα και $a, b \in G$. Εστω ότι οι τάξεις $r = \text{ord } a$, $s = \text{ord } b$ είναι αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους. Δείξτε τότε ότι το στοιχείο $ab \in G$ έχει τάξη rs . (Υπόδειξη: Αν $n = \text{ord}(ab)$ δείξτε ότι $n \mid rs$ και, επίσης, $r \mid n$ και $s \mid n$).

Πρόβλημα 6. Στην ομάδα S_6 εκφράστε κάθε μία από τις παρακάτω μεταθέσεις ως γινόμενο ξένων κύκλων:

α) $(13)(23)$.

β) $(16)(26)(36)(46)(56)$.

γ) $(12345)(16)$.

Πρόβλημα 7. Στην ομάδα S_8 βρείτε τις τροχιές της μετάθεσης $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Γράψτε την σ ως γινόμενο ξένων κύκλων και, επίσης, ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Πρόβλημα 8. Βρείτε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\{\sigma \in S_5 \text{ με } s(3) = 4\}$.

Πρόβλημα 9. Δείξτε ότι η S_n είναι μη αβελιανή ομάδα για $n \geq 3$.

Πρόβλημα 10. Θεωρούμε την ομάδα S_n .

α) Εστω $s \leq n$. Βρείτε το αντίστροφο του στοιχείου $(12 \dots s)$.

β) Εστω $\tau = (1234)$. Εκφράστε τα τ^2, τ^3 ως γινόμενα ξένων κύκλων.

γ) Ποιά είναι η τάξη του στοιχείου $\gamma = (12345)(567)$;

Πρόβλημα 11. Στην ομάδα S_4 , θεωρούμε το υποσύνολο $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Δείξτε ότι η H είναι υποομάδα τής S_4 και μάλιστα αβελιανή (αντιμεταθετική).

Πρόβλημα 12. Να βρεθούν όλες οι υποομάδες τής ομάδας S_3 .