

## ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 7

**Πρόβλημα 1.** Στην ομάδα  $S_4$  βρείτε την κυκλική υποομάδα  $H = \langle (1324) \rangle$  και τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα τής  $H$ .

**Πρόβλημα 2.** Στην ομάδα  $(\mathbb{Z}_{18}, +)$  βρείτε την κυκλική υποομάδα  $H = \langle 6 \bmod 18 \rangle$  και τα αριστερά (που συμπίπτουν με τα δεξιά) σύμπλοκα τής  $H$ .

**Πρόβλημα 3.** Θεωρήστε τούς ακεραίους  $\mathbb{Z}$  ως υποομάδα τής ομάδας  $(\mathbb{R}, +)$  και αποδείξτε ότι όλα τα αριστερά σύμπλοκα τής  $\mathbb{Z}$  (που συμπίπτουν με τα δεξιά) είναι τής μορφής  $\xi + \mathbb{Z}$ , με  $0 \leq \xi < 1$ .

**Πρόβλημα 4.** Έστω ομάδα, τής οποίας η τάξη είναι  $pq$ , όπου  $p, q$  πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι κάθε γνήσια υποομάδα της είναι κυκλική.

**Πρόβλημα 5.** Αποδείξτε ότι, αν μία ομάδα έχει δύο, τουλάχιστον, στοιχεία και η μόνη γνήσια υποομάδα της είναι η τετριμμένη, τότε η ομάδα είναι πεπερασμένη και η τάξη της είναι πρώτος αριθμός.

**Πρόβλημα 6.** Έστω  $G$  ομάδα και  $H$  υποομάδα τής  $G$  με  $(G : H) = 2$ . Να αποδειχθεί ότι  $a^2 \in H$ , για κάθε  $a \in G$ .