ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 8

Πρόβλημα 1. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, εξετάστε άν η απεικόνιση, που δίνεται, είναι ομομορφισμός.

1. Ὁμάδες $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ και $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(n) = -2n$.
2. Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = [x]$.
3. Ομάδα $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τή σχέση $\phi(x) = |x|$.
4. Ομάδα $(G, \star)$ και $\phi : G \longrightarrow G$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(g) = g^{-1}$.
5. Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = e^x$.
6. Ομάδες $(\mathbb{Z}_6, +), (\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(a\mathrm{mod}6) = a\mathrm{mod}2$.
7. Ομάδες $(\mathbb{Z}_9, +), (\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(a\mathrm{mod}9) = a\mathrm{mod}2$.
8. Ομάδες $(F, +), (\mathbb{R}, +)$, όπου F το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και $\phi : F \longrightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(f) = \displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Πρόβλημα 2. Εστω $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ ισομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι η αντίστροφη απεικόνιση $\phi^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ είναι ομομορφισμός ομάδων (άρα και ισομορφισμός ομάδων).

Πρόβλημα 3. **α)** Εστω A μία κυκλική ομάδα με $A =< a >$ και έστω B μιά ομάδα. Έστω $\phi : A \longrightarrow B$ ομομορφισμός ομάδων με $\phi(a) = b$. Βρείτε τα $\phi(a')$, γιά κάθε $a' \in A$. Συμπεράνατε ότι ένας ομομορφισμός μιάς κυκλικής ομάδας σε μιά άλλη ομάδα καθορίζεται από την τιμή τού γεννήτορα.
β) Αν η ομάδα B είναι επίσης κυκλική, δείξτε ότι ο ϕ είναι επιμορφισμός εάν και μόνον εάν το $\phi(a)$ είναι γεννήτορας τής B.

Πρόβλημα 4. Εστω $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ ισομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι:
α) $\forall a \in G_1$ έχομε $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(\phi(a))$.
β) Αν $G_1 =< a >$ τότε $G_2 =< \phi(a) >$.

Πρόβλημα 5. **α)** Έστω G μιά κυκλική ομάδα. Εστω ότι $G =< a >$ και $\phi : G \longrightarrow G$ ομομορφισμός με $\phi(a) = b$. Να δειχθεί ότι ο ϕ είναι αυτομορφισμός εάν και μόνον εάν το $\phi(a) = b$ είναι γεννήτορας τής G.
β) Βρείτε όλους τους αυτομορφισμούς τής ομάδας $\mathbb{Z}_{20}$.
γ) Δείξτε ότι μιά κυκλική ομάδα άπειρης τάξης έχει ακριβώς δύο αυτομορφισμούς. (*Υπόδειξη:* Δείξτε πρώτα ότι μια τέτοια ομάδα έχει ακριβώς δύο γεννήτορες).

Πρόβλημα 6. **α)** Βρείτε όλους τούς ομομορφισμούς από την ομάδα $\mathbb{Z}_2$ στην ομάδα $\mathbb{Z}_6$.
β) Βρείτε όλους τούς ομομορφισμούς από την ομάδα $\mathbb{Z}_4$ στην ομάδα $\mathbb{Z}_6$.

γ) Βρείτε όλους τούς ομομορφισμούς από την ομάδα $\mathbb{Z}_6$ στην ομάδα $\mathbb{Z}_4$.

Πρόβλημα 7. **α)** Βρείτε όλους τούς ομομορφισμούς από την ομάδα $\mathbb{Z}$ στην ομάδα $\mathbb{Z}_n$. Γιά κάθε έναν από αυτούς βρείτε τον πυρήνα τους.
β) Δείξτε ότι δεν υπάρχει μή μηδενικός ομομορφισμός από την ομάδα $\mathbb{Z}_n$ στην ομάδα $\mathbb{Z}$.