ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 9

Πρόβλημα 1. Εστω R δακτύλιος με μονάδα και T το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του. Δείξτε ότι το T εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό αποτελεί ομάδα.

Πρόβλημα 2. Εστω p πρώτος αριθμός. Ορίζουμε $A_p = \{\frac{m}{n}, \text{όπου } m, n \in \mathbb{Z} \text{ με } (p, n) = 1\} \subseteq \mathbb{Q}$.
α) Δείξτε ότι το A_p είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα.
β) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του.

Πρόβλημα 3. α) Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης τού 3^{47} με το 23.
β) Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 94^{200} διά 13.
γ) Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 7^{1000} διά 24.
δ) Βρείτε τό υπόλοιπο τής διαίρεσης τού 641^{108002} διά 63.
ε) Βρείτε το τελευταίο δεκαδικό ψηφίο του αριθμού 7^{123}.
στ) Αποδείξτε ότι, γιά κάθε ακέραιο n, ο αριθμός $n^{37} - n$ είναι πολλαπλάσιο τού 383838. (Υπόδειξη: $383838 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$.)

Πρόβλημα 4. α) Εστω a ακέραιος αριθμός. Δείξτε ότι το 4 δεν διαιρεί το $a^2 - 2$ ούτε το $a^2 - 3$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον τύπο $a\text{mod}4 \cdot a\text{mod}4 = a^2\text{mod}4$.)
β) Αν γιά τον ακέραιο a ισχύει ότι $4|a - 3$ δείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y γιά τούς οποίους έχουμε $x^2 + y^2 = a$.

Πρόβλημα 5. α) Γράψτε όλα τα μή μηδενικά στοιχεία τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_{13}$ και δίπλα στο καθένα το αντίστροφό του.
β) Έστω p περιττός πρώτος. Αποδείξτε ότι τά μόνα στοιχεία τού $\mathbb{Z}_p$, τα οποία έχουν αντίστροφο τόν ευατό τους, είναι τα $1\text{mod}p$ και $(p-1)\text{mod}p$. Βάσει αυτού αποδείξτε ότι $1\text{mod}p \cdot 2\text{mod}p \cdots (p-1)\text{mod}p = (p-1)\text{mod}p$ και αποδείξτε το *Θεώρημα τού Wilson*: $(p-1)! \equiv -1\text{mod}p$.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι τα παρακάτω σύνολα είναι υποδακτύλιοι του δακτυλίου των μιγαδικών αριθμών και βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία τους.
α) $\mathbb{Z}[i] = \{n + mi \in \mathbb{C}, \text{ όπου } n, m \in \mathbb{Z}\}$.
β) $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}\,] = \{n + m\sqrt{-3} \in \mathbb{C}, \text{ όπου } n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Πρόβλημα 7. Εστω M το σύνολο των 2×2 πινάκων με στοιχεία από τους πραγματικούς αριθμούς, της μορφής $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το M εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι σώμα.

Πρόβλημα 8. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] := \{a + b\sqrt{3}, \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$ αποτελεί υπόσωμα του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Πρόβλημα 9. Αποδείξτε ότι, ενώ οι ομάδες $(6\mathbb{Z}, +)$ και $(3\mathbb{Z}, +)$ είναι ισόμορφες, οι δακτύλιοι $(6\mathbb{Z}, +, \cdot)$ και $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ δεν είναι. Μάλιστα, ούτε κάν επιμορφισμός δακτυλίων $\phi : 6\mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$ δέν υπάρχει.