ΑΛΓΕΒΡΑ - ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

14 Ιουνίου 2002, Διδάσκων: Α. Κουβιδάκης

Πρόβλημα 1. **α)** [**Μονάδες 5**] Δείξτε ότι $(4312, 585) = 1$.
β) [**Μονάδες 10**] Εστω a, b θετικοί ακέραιοι. Δείξτε ότι αν $(a, b) = 1$ τότε μ.κ.δ.$(a, 4b) = 1$ ή 2 ή 4.

Πρόβλημα 2. Εστω $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, με $a, b \in \mathbb{Z}\}$.
α) [**Μονάδες 5**] Δείξτε ότι το M εφοδιασμένο με την συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμό πινάκων είναι δακτύλιος.
β) [**Μονάδες 10**] Βρείτε όλα τα στοιχεία του M που έχουν αντίστροφο ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Πρόβλημα 3. Εστω S_8 η ομάδα των μεταθέσεων των 8 στοιχείων και έστω $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 6 & 4 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_8$.
α) [**Μονάδες 5**] Γράψτε την σ ως γινόμενο (σύνθεση) αντιμεταθέσεων.
β) [**Μονάδες 10**] Βρείτε το σ^{158}.

Πρόβλημα 4. **α)** [**Μονάδες 5**] Στην ομάδα $\mathbb{Z}_{10}$ βρείτε τα στοιχεία της κυκλικής υποομάδας $< -4\text{mod}10 >$.
β) [**Μονάδες 10**] Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς ομάδων από την ομάδα $\mathbb{Z}_8$ στην ομάδα $\mathbb{Z}_{20}$.

Πρόβλημα 5. **α)** [**Μονάδες 9**] Εστω G ομάδα με τάξη $|G| = 49$. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα H της G, με $H \neq G$, είναι κυκλική.
β) [**Μονάδες 10**] Ποιό το υπόλοιπο της διαίρεσης του $60 \cdot 9^{363} + 31 \cdot 15^{758}$ με το 14;

Πρόβλημα 6. **α)** [**Μονάδες 9**] Βρείτε τον μ.κ.δ.$(f(x), g(x))$, όπου $f(x) = x^7 + x^5 + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$, $g(x) = \bar{3}x^2 + \bar{4} \in \mathbb{Z}_5[x]$ (με $\bar{a}$ συμβολίζουμε το στοιχείο $a$mod5 του $\mathbb{Z}_5$).
β) [**Μονάδες 12**] Βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 3 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_3[x]$ που έχουν σταθερό συντελεστή ίσο με $\bar{1}$ και μεγιστοβάθμιο συντελεστή ίσο με $\bar{2}$, δηλ. βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα στον $\mathbb{Z}_3[x]$ της μορφής $\bar{1} + \bar{a_1}x + \bar{a_2}x^2 + \bar{2}x^3$ (με $\bar{a}$ συμβολίζουμε το στοιχείο $a$mod3 του $\mathbb{Z}_3$).