ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Έστω A, B, C σύνολα. Να αποδειχθούν τα εξής:
α) $(A \backslash B) \cup B = A \cup B$.
β) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.
γ) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

Πρόβλημα 2. Στο σύνολο $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ των φυσικών αριθμών ορίζομε τις παρακάτω σχέσεις:
$\mathcal{R}_1$, με $a\mathcal{R}_1 b$ αν το a είναι πολλαπλάσιο τού b.
$\mathcal{R}_2$, με $a\mathcal{R}_2 b$ αν το $a = b - 1$.
$\mathcal{R}_3$, με $a\mathcal{R}_3 b$ αν το a έχει το ίδιο πλήθος ψηφίων με το b.
Βρείτε ποιές από τις σχέσεις είναι α) ανακλαστικές, β) συμμετρικές, γ) μεταβατικές.

Πρόβλημα 3. Βρείτε ποιές από τις παρακάτω σχέσεις στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ ορίζουν σχέσεις ισοδυναμίας. Γιά κάθε μιά από τις τελευταίες περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.
α) $\mathcal{R}_1$, με $x\mathcal{R}_1 y$ αν $x \geq y$.
β) $\mathcal{R}_2$, με $x\mathcal{R}_2 y$ αν $|x| = |y|$.
γ) $\mathcal{R}_3$, με $x\mathcal{R}_3 y$ αν $|x - y| \leq 3$.

Πρόβλημα 4. Εστω $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών. Ορίζουμε $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$. Στο $\mathbb{Q}^*$ ορίζουμε την σχέση $\mathcal{R}$ ως εξής:

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}.$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρεθεί η κλάση ισοδυναμίας τού στοιχείου $5/2 \in \mathbb{Q}^*$.

Πρόβλημα 5. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε την σχέση $\sim$ ως εξης: $a \sim b \Longleftrightarrow b - a \in \mathbb{R}$, όπου $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε το σύνολο πηλίκων $\mathbb{C}/\sim$.

Πρόβλημα 6. Στο σύνολο $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, ορίζουμε την σχέση $\sim$ ως εξης: $a \sim b$ αν και μόνον αν τα a, b έχουν το ίδιο τελικό ψηφίο στο δεκαδικό σύστημα γραφής. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε το σύνολο πηλίκων $\mathbb{N}_0/\sim$.

Πρόβλημα 7. Στο σύνολο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$, ορίζουμε την σχέση $\sim$ ως εξης: $a \sim b$ αν και μόνον αν $ab > 0$. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει αυτή η σχέση.

Πρόβλημα 8. Έστω $\mathbb{Z}_m$ το σύνολο των ακεραίων modulo m τα στοιχεία τού οποίου τα έχουμε συμβολίσει ως $\bar{a}$, $a \in \mathbb{Z}$. Βρείτε τον ακέραιο r με $0 \leq r \leq m - 1$ για τον οποίο έχουμε:

α) $\overline{126} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_{12}$.
β) $\overline{-1} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_{12}$.
γ) $\overline{-20} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_8$.
δ) $\overline{-200} = \bar{r}$ στο $\mathbb{Z}_9$.

Πρόβλημα 9. Στο σύνολο $A = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, όπου $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, ορίζουμε την σχέση $\sim$ ως εξής: $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2) \Longleftrightarrow m_1 + n_2 = m_2 + n_1$.
α) Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
β) Αποδείξτε ότι, για κάθε $(m, n) \in A$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $(m, n) \sim (k, 0)$ είτε $(m, n) \sim (0, k)$.
γ) Περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει αυτή η σχέση.

Πρόβλημα 10. Εστω $f : X \longrightarrow Y$ απεικόνιση. Να αποδειχθεί ότι:
α) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, όπου $B_1, B_2 \subseteq Y$.
β) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, όπου $B_1, B_2 \subseteq Y$.
γ) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$, όπου $A_1, A_2 \subseteq X$.
δ) Ισχύει ότι $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;

Πρόβλημα 11. Εστω $f : X \longrightarrow Y$ απεικόνιση. Να αποδειχθεί ότι:
α) Για κάθε υποσύνολο A τού X, ισχύει $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
β) Για κάθε υποσύνολο B τού Y, ισχύει $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Σημείωση: Οι ασκήσεις 10 και 11 υπάγονται στο μάθημα που θα διδαχθεί την Τρίτη 26/2.