

ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #10

Πρόβλημα 1. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία (μονάδες) στους επόμενους δακτυλίους:

- α) $\mathbb{Z}[x]$.
- β) $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 2. α) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $\bar{3} + \bar{2}x + \bar{2}x^2$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο (μονάδα) τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_4[x]$, όπου με \bar{a} συμβολίζουμε τα στοιχεία τού \mathbb{Z}_4 .
β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $\bar{4}x + \bar{3} \in \mathbb{Z}_8[x]$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο (μονάδα) τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_8[x]$.
γ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x + \bar{2} \in \mathbb{Z}_8[x]$ δεν είναι αντιστρέψιμο στοιχείο (μονάδα) τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_8[x]$.

Πρόβλημα 3 Έστω R αντιμεταθετικός δακτύλιος και έστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$, όπου $a_n \neq 0$, είναι διαιρέτης τού μηδενός. Δείξτε τότε ότι το $a_n \in R$ είναι διαιρέτης τού μηδενός.

Πρόβλημα 4. α) Αποδείξτε τις εξής γενικεύσεις τού προβλήματος 6β), φυλλάδιο 9. Αν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και $n \in \mathbb{N}$ τότε:

- i) $(\bar{a} + \bar{b})^{p^n} = \bar{a}^{p^n} + \bar{b}^{p^n}$, για κάθε $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_p$.
- ii) $(\bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_k)^{p^n} = \bar{a}_1^{p^n} + \dots + \bar{a}_k^{p^n}$, για κάθε $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k \in \mathbb{Z}_p$.
- β) Με χρήση τού ερωτήματος α) δείξτε ότι αν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ τότε $f(x)^p = f(x^p)$.
- γ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^p - \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$, p =πρώτος αριθμός, έχει μοναδική ρίζα.

Πρόβλημα 5. α) Έστω $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Δείξτε ότι αν $\xi = p/q \in \mathbb{Q}$ με $(p, q) = 1$ είναι ρίζα τού πολυωνύμου $f(x)$ στο \mathbb{Q} , τότε $q|a_n$.
β) Έστω ότι το πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{Z}[x]$ έχει ρίζα στο \mathbb{Q} . Δείξτε τότε ότι έχει ρίζα στο \mathbb{Z} .

Πρόβλημα 6. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$. Βρείτε όλες τις ρίζες τού $f(x)$: i) στο \mathbb{Z} , ii) στο \mathbb{Q} , iii) στο \mathbb{R} και iv) στο \mathbb{C} .

Πρόβλημα 7. Βρείτε όλες τις ρίζες των παρακάτω πολυωνύμων:

- α) $x^3 - \bar{1} \in \mathbb{Z}_2[x]$.
- β) $x^5 + \bar{3}x^3 + x^2 + \bar{2}x \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 8. Βρείτε όλες τις ρίζες τού πολυωνύμου $f(x) = \bar{3}x^{223} + \bar{2}x^{70} + \bar{3}x^{61} + \bar{2}x^{40} \in \mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 9. Βρείτε ένα πολυώνυμο με βαθμό ≤ 6 στο $\mathbb{Z}_7[x]$ που να επάγει την ίδια πολυωνυμική απεικόνιση με το πολυώνυμο $f(x) = x^{10} + \bar{3}x^7 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_7[x]$.