ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 11

Πρόβλημα 1. **α)** Ειναι το $x^2+\bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;
β) Ειναι το $x^2+\bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;
γ) Είναι το $x^3+x+\bar{2}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_3[x]$;
δ) Είναι το $x^3-\bar{3}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_7[x]$;
ε) Είναι το $x^3+x+\bar{1}$ ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $\mathbb{Z}_5[x]$;

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι το $x-\bar{1}$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x)$ στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$, αν και μόνον αν, το $f(x)$ έχει έναν άρτιο αριθμό μη μηδενικών συντελεστών.

Πρόβλημα 3. Διαιρέστε το $2x^5-x^3+3x-5$ με το x^2+7, θεωρώντας τα ως πολυώνυμα:
α) τού $\mathbb{Z}_3[x]$,
β) τού $\mathbb{Z}_5[x]$.

Πρόβλημα 4. Βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 4 στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_2[x]$.

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^4+4\in\mathbb{Z}_5[x]$ γράφεται ως γινόμενο τεσσάρων πολυωνύμων βαθμού ένα.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι το πολυώνυμο x^4-22x^2+1 είναι ανάγωγο στον δακτύλιο $\mathbb{Q}[x]$.

Πρόβλημα 7. Βρείτε αν τα παρακάτω πολυώνυμα ικανοποιούν το κριτήριο τού Eisenstein.
α) $8x^3+6x^2-9x+24$.
β) $2x^{10}-25x^3+10x^2-30$.

Πρόβλημα 8. Έστω p πρώτος και $f(x)\in\mathbb{Z}_p[x]$ βαθμού $>p$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο $g(x)\in\mathbb{Z}_p[x]$, βαθμού $<p$, τέτοιο ώστε $g(a)=f(a)$ για κάθε $a\in\mathbb{Z}_p$. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το πολυώνυμο $x^p-x\in\mathbb{Z}_p[x]$).

Πρόβλημα 9. Έστω p πρώτος και $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_p$ ο ομομορφισμός δακτυλίων, που ορίζεται από τη σχέση $\phi(a)=\bar{a}$. Τότε:

1. Η απεικόνιση $\overline{\phi}:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}_p[x]$, που ορίζεται από τη σχέση
$$\overline{\phi}(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=\phi(a_0)+\phi(a_1)x+\cdots+\phi(a_n)x^n$$
είναι ομομορφισμός δακτυλίων.
2. Έστω $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$, τέτοιο ώστε, ο βαθμός τού $\overline{\phi}(f(x))$ είναι ο ίδιος με τον βαθμό τού $f(x)$ και το $\overline{\phi}(f(x))$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Z}_p[x]$. Αποδείξτε ότι, τότε, το $f(x)$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.
3. Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x)=x^3+17x+36$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.