ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Πρόβλημα 1. Εστω $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ απεικονίσεις. Να αποδειχθεί ότι:
α) Αν η $g \circ f$ είναι 1-1 τότε η f είναι 1-1.
β) Αν η $g \circ f$ είναι επί τότε η g είναι επί.

Πρόβλημα 2. Εστω $X = \{2, 3, 4\}$ και $Y = \{1, 2, 4, 5\}$.
α) Πόσες 1-1 απεικονίσεις υπάρχουν από το X στο Y;
β) Πόσες επί απεικονίσεις υπάρχουν από το Y στο X;

Πρόβλημα 3. Εστω $f : X \longrightarrow Y$ απεικόνιση. Να αποδειχθεί ότι:
α) Υπάρχει απεικόνιση $g : Y \longrightarrow X$ με $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ εάν και μόνον εάν η f είναι επί. Για παράδειγμα, αν $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ με $f(a) = |a|$, βρείτε την g.
β) Υπάρχει απεικόνιση $h : Y \longrightarrow X$ με $h \circ f = \mathrm{id}_X$ εάν και μόνον εάν η f είναι 1-1. Για παράδειγμα, αν $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ με $f(n) = 2n$, βρείτε την g.

Πρόβλημα 4. Γράψτε τον τύπο τής Ευκλείδειας διαίρεσης τού a διά τού b στις παρακάτω περιπτώσεις:
α) $a = -327$, $b = 12$.
β) $a = 453$, $b = -8$.
γ) $a = -372$, $b = -11$.

Πρόβλημα 5. Βρείτε τον d = μ.κ.δ.$(1147, 851)$. Γράψτε τον d στην μορφή $d = 1147\,\kappa + 851\,\lambda$ γιά κάποιους ακέραιους κ, λ.

Πρόβλημα 6. Έστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι υπάρχουν ακέραιοι x, y με $ax + by = c$ αν και μόνον αν μ.κ.δ.$(a, b) \mid c$.

Πρόβλημα 7. Εστω $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(a, c) = 1$ και μ.κ.δ.$(b, c) = d$ τότε μ.κ.δ.$(ab, c) = d$.

Πρόβλημα 8. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δείξτε ότι μ.κ.δ.$(5n + 1, 21n + 4) = 1$.

Πρόβλημα 9. Εστω $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$.
α) Αν $k \neq 0$, δείξτε ότι μ.κ.δ.$(ka, kb) = |k|$ μ.κ.δ.(a, b).
β) Δείξτε ότι αν μ.κ.δ.(a, c) = μ.κ.δ.$(b, c) = 1$ τότε μ.κ.δ.$(ab, c) = 1$
γ) Δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(a, c) = d, a|b$ και $c|b$ τότε $ac|bd$.
δ) Αν μ.κ.δ.$(b, c) = 1$ τότε δείξτε ότι μ.κ.δ.(ab, c) = μ.κ.δ.(a, c).
ε) Αν μ.κ.δ.$(ab, c) = 1$ τότε δείξτε ότι μ.κ.δ.$(a, c) = 1$ και μ.κ.δ.$(b, c) = 1$.

Πρόβλημα 10. Εστω $m, n \in \mathbb{N}$ με μ.κ.δ.$(m, n) = 1$. Δείξτε ότι μ.κ.δ.$(m + n, m - n) = 1$ ή 2.

Πρόβλημα 11. Χρησιμοποιήσατε την Ευκλείδεια διαίρεση για να δείξετε ό-τι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 1$ γράφεται ως άθροισμα δυνάμεων τού 2, δηλ.

$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s}$, για κάποιους φυσικούς k_i με $0 \leq k_s \leq \ldots \leq k_2 \leq k_1$.