ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #3

Πρόβλημα 1. Βρείτε τον $d =$ μ.κ.δ.$(144, 625)$ χρησιμοποιόντας ι) την Ευκλείδεια διαίρεση και ιι) την ανάλυση των 144 και 625 σε πρώτους αριθμούς.

Πρόβλημα 2. **α)** Εστω p πρώτος αριθμός και $a \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι αν $p|a^2$ τότε $p|a$. Ισχύει το ίδιο αν ο p δεν είναι πρώτος αριθμός;
β) Εστω $m, n \in \mathbb{N}$ με μ.κ.δ.$(m, n) = 1$. Υποθέτουμε ότι $mn = k^2$, γιά κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $m = a^2$ και $n = b^2$. Ισχύει το ίδιο αν βγάλουμε την υπόθεση μ.κ.δ.$(m, n) = 1$;

Πρόβλημα 3. **α)** Εστω $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq 1$. Δείξτε ότι $2^n - 1|2^{nm} - 1$. Συμπεράνατε ότι αν $2^n - 1$ είναι πρώτος αριθμός τότε και ο n είναι πρώτος.
β) Εστω $k, r \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $2^{2^r} + 1|2^{2^r(2k+1)} + 1$. Συμπεράνατε ότι αν ο $2^n + 1$ είναι πρώτος αριθμός τότε το n είναι μιά δύναμη τού 2.

Πρόβλημα 4. Εστω $m, n \in \mathbb{N}$.
α) Δείξτε ότι αν το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού m με το n είναι r, δηλ. $m = qn + r$ με $0 \leq r < n$, τότε το υπόλοιπο τής διαίρεσης τού $2^m - 1$ με τον $2^n - 1$ είναι $2^r - 1$. (*Υπόδειξη:* Παρατηρήστε ότι το $2^{qn} - 1$ είναι πολλαπλάσιο τού $2^n - 1$).
β) Βασιζόμενοι στην εύρεση τού μ.κ.δ. με χρήση τού Ευκλείδειου αλγορίθμου, δείξτε ότι αν μ.κ.δ.$(m, n) = d$ τότε μ.κ.δ.$(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^d - 1$.

Πρόβλημα 5. Υπολογίστε συναρτήσει τού φυσικού αριθμού n το πλήθος των συνόλων $\{a, b\} \subset \mathbb{N}$ με την ιδιότητα μ.κ.δ.$(a, b) = 1$ και $ab = 10^{n+1}30^n$.

Πρόβλημα 6. **α)** Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι:
i) Αν μ.κ.δ.$(a, b) = 1$, τότε μ.κ.δ.$(a + b, a - b) = 1$ ή 2.
ii) Ἀν μ.κ.δ.$(a, b) = 1$, τότε μ.κ.δ.$(a - b, a^2 + ab + b^2) = 1$ ή 3.
β) Για κάθε μιά από τις παρακάτω εξισώσεις, βρείτε όλες τίς λύσεις της x, y που είναι φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το ερώτημα α) και το θεώρημα ανάλυσης σε πρώτους αριθμούς).

1. $x^2 - y^2 = 135$
2. $x^2 - y^2 = 72$
3. $x^3 - y^3 = 721$
4. $x^3 - y^3 = 3087$

Πρόβλημα 7. Για ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η $\star$ ορίζει διμελή πράξη;. Στην περίπτωση που ορίζεται πράξη εξετάστε αν αυτή είναι προσεταιριστική, αντιμεταθετική και αν έχει ουδέτερο στοιχείο.
α) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = a + b$
β) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = \frac{a}{b}$
γ) Στο σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$ με $a \star b = a^b$

δ) Στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ με $a \star b = a^b$
ε) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = ab + 1$.
στ) Στο σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ με $a \star b = |a|\, b$.

Πρόβλημα 8. Εστω $\star$ μια (διμελής) πράξη στο σύνολο A η οποία έχει ουδέτερο στοιχείο και για την οποία ισχύει ότι $a \star (b \star c) = (a \star c) \star b$, γιά κάθε $a, b, c \in A$. Να αποδειχθεί ότι η πράξη $\star$ είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.