ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ $\#4$

Πρόβλημα 1. Έστω $(G, \star)$ ομάδα και $a, b \in G$. Δείξτε ότι $a \star b = e \Longleftrightarrow b \star a = e$, όπου ως e συμβολίζουμε το ουδέτερο στοιχείο τής G.

Πρόβλημα 2. Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω ζεύγη συνιστούν ομάδα:
α) $(\{-1, 0, 1\}, +)$.
β) $(A, +)$, όπου $A = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, συνεχής συνάρτηση$\}$. Η πράξη $+$ συμβολίζει το άθροισμα συναρτήσεων, δηλ. αν $f, g \in A$ τότε $f + g$ είναι η συνάρτηση με $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
γ) $(A, \cdot)$, όπου A όπως στο β). Η πράξη $\cdot$ συμβολίζει το γινόμενο συναρτήσεων, δηλ. αν $f, g \in A$ τότε $f \cdot g$ είναι η συνάρτηση με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
δ) $(B, \cdot)$, όπου $B = \{2^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ και $\cdot$ ο πολλαπλασιασμός.

Πρόβλημα 3. Έστω n ένας φυσικός αριθμός. Συμβολίζουμε ως M_n το σύνολο των n-στών μιγαδικών ριζών τής μονάδος, δηλ. το σύνολο των μιγαδικών λύσεων τής εξίσωσης $z^n = 1$. Δείξτε ότι το $(M_n, \cdot)$, όπου $\cdot$ ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών, είναι αβελιανή ομάδα.

Πρόβλημα 4. Εστω T ισόπλευρο τρίγωνο και έστω O το σημείο τομής των μεσοκαθέτων του. Εστω $\sigma_0 : T \longrightarrow T$ η ταυτοτική απεικόνιση και $\sigma_1 : T \longrightarrow T$ (αντιστ. $\sigma_2 : T \longrightarrow T$) η απεικόνιση που αντιστοιχεί σε στροφή 60^0 (αντιστ. 120^0) με κέντρο O. Εστω, επίσης, $\tau_i : T \longrightarrow T,\ i = 1, 2, 3$, οι απεικονίσεις που αντιστοιούν στις ανακλασεις τού τριγώνου με άξονες τις τρεις μεσοκαθέτους. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων αποτελεί ομάδα και βρείτε τον πίνακα πράξης της.

Πρόβλημα 5. Εστω $(G, \star)$ ομάδα με $2n$ στοιχεία. Με την χρήση τού πίνακα πράξης τής G δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο a της ομάδας, που δεν είναι το ουδέτερο, με την ιδιότητα $a = a^{-1}$.

Πρόβλημα 6. Εστω $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση$\}$ και $F^\star = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ συνάρτηση$\}$. Στό F ορίζομε πράξη την πράξη $+$ και στο $F^\star$ την πράξη $\cdot$ όπως στο πρόβλημα 2. Δείξτε ότι $(F, +)$ και $(F^\star, \cdot)$ είναι ομάδες. Εν συνεχεία, θεωρήστε τα εξής σύνολα:

$$\begin{aligned}
A &= \{f \in F \,:\, f(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}.\\
B &= \{f \in F \,:\, f(1) = 0\}.\\
C &= \{f \in F \,:\, f(0) = 1\}.\\
D &= \text{το σύνολο των σταθερών μη μηδενικών συναρτήσεων.}
\end{aligned}$$

Ποιά από τα παραπάνω είναι υποομάδες τής $(F, +)$ και ποιά τής $(F^\star, \cdot)$.

Πρόβλημα 7. Εστω $(G, \star)$ ομάδα και έστω a στοιχείο τής G. Δείξτε ότι το $H_a := \{g \in G,\ \text{όπου } a \star g = g \star a\}$ είναι υποομάδα τής G.

Πρόβλημα 8. Εστω $(G, \star)$ μια αβελιανή ομάδα και έστω m ένας ακέραιος α-ριθμός. Δείξτε ότι το $G_m := \{g \in G,\ \text{με } g^m = e\}$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο, είναι υποομάδα τής G.

Πρόβλημα 9. **α)** Εστω $(G, \star)$ ομάδα και K, L υποομάδες τής G. Δείξτε ότι $K \cap L$ είναι υποομάδα τής G.
β) Εστω $n, m \in \mathbb{Z}$. Από το ερώτημα α) η τομή $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ είναι υποομάδα τής ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$. Επομένως, με βάση την θεωρία ισούται προς $e\,\mathbb{Z}$, γιά κάποιο $e \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Βρείτε το e συναρτήσει των n, m.

Πρόβλημα 10. **α)** Εστω $(G, \star)$ αβελιανή ομάδα και A, B υποομάδες τής G. Δείξτε ότι το $A \star B = \{a \star b,\ a \in A,\ b \in B\}$ είναι υποομάδα τής G.
β) Εστω $n, m \in \mathbb{Z}$. Από το ερώτημα α) το $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{a + b,\ a \in n\mathbb{Z},\ b \in m\mathbb{Z}\}$ είναι υποομάδα τής ομάδας $(\mathbb{Z}, +)$. Επομένως, με βάση την θεωρία ισούται προς $d\,\mathbb{Z}$, γιά κάποιο $d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Βρείτε το d συναρτήσει των n, m.