ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #5

Πρόβλημα 1. Έστω $(M_n, \cdot)$ η ομάδα των n-οστών μιγαδικών ριζών τής μονάδος, βλ. πρόβλημα 3 στο φυλλαδιο 4. Βρείτε, ποιά υποομάδα τής M_n παράγει το στοιχείο ζ, στίς ακόλουθες περιπτώσεις:
(α′) $n = 6$, $\zeta = \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6}$,
(β′) $n = 6$, $\zeta = \cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}$,
(γ′) $n = 12$, $\zeta = \cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12}$,
(δ′) $n = 12$, $\zeta = \cos\frac{6\pi}{12} + i\sin\frac{6\pi}{12}$,
(ε′) $n = 12$, $\zeta = \cos\frac{10\pi}{12} + i\sin\frac{10\pi}{12}$.

Πρόβλημα 2. Εξετάσατε ποιές από τις παρακάτω ομάδες είναι κυκλικές.
α) $(\mathbb{R}, +)$.
β) $(\{+1, -1\}, \cdot)$.
γ) $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

Πρόβλημα 3. Γιά τις ομάδες $\mathbb{Z}_3$ και $\mathbb{Z}_6$:
α) Βρείτε τον πίνακα πράξης τους.
β) Βρείτε όλους τούς γεννήτορες των παραπάνω ομάδων.
γ) Βρείτε όλες τις (διαφορετικές) υποομάδες τους.
δ) Βρείτε την τάξη όλων των στοιχείων τους.
ε) Βρείτε τα αντίθετα όλων των στοιχείων τους.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι αν το p είναι πρώτος αριθμός τότε οι μόνες υποομάδες τής ομάδας $\mathbb{Z}_p$ είναι η τετριμμένη και η $\mathbb{Z}_p$.

Πρόβλημα 5. **α)** Να δειχθεί ότι η τάξη τού στοιχείου $a \bmod n$ στην ομάδα $\mathbb{Z}_n$ ισούται με $\frac{n}{\text{μ.κ.δ.}(n,a)}$. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήσατε τον χαρακτηρισμό τής τάξης στοιχείου που έχουμε μάθει και την ανάλυση σε πρώτους αριθμούς).
β) Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής $\mathbb{Z}_{30}$ που γεννιέται από το $25 \bmod 30$;
γ) Ποιά η τάξη τής υποομάδας τής $\mathbb{Z}_{42}$ που γεννιέται από το $30 \bmod 42$;

Πρόβλημα 6. Βρείτε την κυκλική υποομάδα τής πολλαπλασιαστικής ομάδας των 4×4 αντιστρεψίμων πινάκων, την οποία παράγει (χωριστά) καθένας από τούς παρακάτω πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πρόβλημα 7. Εστω $\mathbb{C}^\star$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Βρείτε την τάξη των κυκλικών υποομάδων τής $\mathbb{C}^\star$ που παράγονται από τα στοιχεία: i, $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $1+i$. Σε κάθε μιά από τις παραπάνω περιπτώσεις βρείτε όλους τούς γεννήτορες των κυκλικών υποομάδων.

Πρόβλημα 8. Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα και $g \in G$ στοιχείο τάξεως n.
α) Αποδείξτε ότι η σχέση $g^a = e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο, και a ακέραιος, ισοδυναμεί με το ότι ο a είναι πολλαπλάσιο τού n.
β) Αποδείξτε ότι η σχέση $g^a = g^b$, όπου a, b ακέραιοι, ισοδυναμεί με το ότι ο $a - b$ είναι πολλαπλάσιο τού n.

Πρόβλημα 9. Στην ομάδα S_8 βρείτε την αντίστροφη τής μετάθεσης $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Βρείτε, επίσης, την τάξη $\mathrm{ord}(\sigma)$ τής σ.

Πρόβλημα 10. Βρείτε το πλήθος των στοιχείων τού συνόλου $\{\sigma \in S_5 \text{ με } \sigma(3) = 4\}$.

Πρόβλημα 11. Δείξτε ότι η S_n είναι μή αβελιανή ομάδα για $n \geq 3$.