

ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 6

Πρόβλημα 1. Στην ομάδα S_8 βρείτε τις τροχιές τής μετάθεσης $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Γράψτε την σ ως γινόμενο ξένων κύκλων και, επίσης, ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.

Πρόβλημα 2. Στην ομάδα S_6 εκφράστε κάθε μία από τις παρακάτω μεταθέσεις ως γινόμενο ξένων κύκλων:

α) $(13)(23)$.

β) $(16)(26)(36)(46)(56)$.

γ) $(12345)(16)$.

Πρόβλημα 3. Θεωρούμε την ομάδα S_n .

α) Εστω $s \leq n$. Βρείτε το αντίστροφο του στοιχείου $(12 \dots s)$.

β) Εστω $\tau = (1234)$. Βρείτε την τάξη του στοιχείου τ . Εκφράστε τα τ^2, τ^3 ως γινόμενα ξένων κύκλων.

γ) Ποιά είναι η τάξη του στοιχείου $\gamma = (12345)(567)$;

Πρόβλημα 4. Στην ομάδα S_4 , θεωρούμε το υποσύνολο $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Δείξτε ότι η H είναι υποομάδα τής S_4 και μάλιστα αβελιανή (αντιμεταθετική).

Πρόβλημα 5. Να βρεθούν όλες οι υποομάδες τής ομάδας S_3 .

Πρόβλημα 6. Εξετάστε αν η παρακάτω μετάθεση σ είναι άρτια ή περιττή:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 8 & 7 & 9 & 10 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα 7. Έστω H υποομάδα τής ομάδας μεταθέσεων S_n , $n \geq 2$. Δείξτε ότι ή όλες οι μεταθέσεις τής H είναι άρτιες ή ακριβώς οι μισές από τις μεταθέσεις τής H είναι άρτιες και οι άλλες μισές περιττές.