ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ #7

Πρόβλημα 1. Στην ομάδα S_4 βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle(1324)\rangle$ και τα αριστερά και δεξιά σύμπλοκα τής H στην S_4.

Πρόβλημα 2. Στην ομάδα $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ βρείτε την κυκλική υποομάδα $H = \langle 6 \bmod 18\rangle$ και τα αριστερά (που συμπίπτουν με τα δεξιά) σύμπλοκα τής H στην $\mathbb{Z}_{18}$.

Πρόβλημα 3. Θεωρήστε τούς ακεραίους $\mathbb{Z}$ ως υποομάδα τής ομάδας $(\mathbb{R}, +)$ και αποδείξτε ότι όλα τα αριστερά σύμπλοκα τής $\mathbb{Z}$ (που συμπίπτουν με τα δεξιά) είναι τής μορφής $\xi + \mathbb{Z}$, με $0 \leq \xi < 1$.

Πρόβλημα 4. Έστω ομάδα G, τής οποίας η τάξη είναι pq, όπου p, q πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι κάθε γνήσια υποομάδα τής G είναι κυκλική.

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι, αν μία ομάδα έχει δύο, τουλάχιστον, στοιχεία και η μόνη γνήσια υποομάδα της είναι η τετριμμένη, τότε η ομάδα είναι πεπερασμένη και η τάξη της είναι πρώτος αριθμός (*Υπόδειξη:* πάρτε ένα στοιχείο $a \neq e$ τής ομάδας και εξετάστε την κυκλική υποομάδα $< a >$).

Πρόβλημα 6. Εστω G ομάδα και H υποομάδα τής G με $(G : H) = 2$. Να αποδειχθεί ότι $a^2 \in H$, γιά κάθε $a \in G$.

Πρόβλημα 7. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, εξετάστε άν η απεικόνιση, που δίνεται, είναι ομομορφισμός. Στην περίπτωση που είναι ομομορφισμός βρείτε τιν πυρήνα του και την εικόνα του.

1. Ὁμάδες $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ και $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(n) = -2n$.
2. Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = [x]$.
3. Ομάδα $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τή σχέση $\phi(x) = |x|$.
4. Ομάδα $(G, \star)$ και $\phi : G \longrightarrow G$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(g) = g^{-1}$.
5. Ομάδες $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^*, \cdot)$ και $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(x) = e^x$.
6. Ομάδες $(\mathbb{Z}_6, +), (\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(a \bmod 6) = a \bmod 2$.
7. Ομάδες $(\mathbb{Z}_9, +), (\mathbb{Z}_2, +)$ και $\phi : \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(a \bmod 9) = a \bmod 2$.
8. Ομάδες $(F, +), (\mathbb{R}, +)$, όπου F το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και $\phi : F \longrightarrow \mathbb{R}$, οριζόμενη από τη σχέση $\phi(f) = \displaystyle\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Πρόβλημα 8. Εστω $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ ισομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι η αντίστροφη απεικόνιση $\phi^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ (η οποία υπάρχει διότι η ϕ ως απεικόνιση είναι 1-1 και επί) είναι ομομορφισμός ομάδων (άρα και ισομορφισμός ομάδων).

Πρόβλημα 9. Έστω $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ ομορφισμός ομάδων. Δείξτε ότι:
α) $\forall a \in G_1$ έχομε $\mathrm{ord}(\phi(a)) \mid \mathrm{ord}(a)$.
β) Αν, επιπλέον ο ϕ είναι ισομορφισμός, τότε δείξτε ότι $\mathrm{ord}(\phi(a)) = \mathrm{ord}(a)$.

Πρόβλημα 10. **α)** Εστω A μία κυκλική ομάδα με $A =< a >$ και έστω B μιά ομάδα. Έστω $\phi : A \longrightarrow B$ ομομορφισμός ομάδων με $\phi(a) = b$. Εκφράστε τα $\phi(a^{'})$ συναρτήσει τού b, γιά κάθε $a^{'} \in A$. Συμπεράνατε ότι ένας ομομορφισμός μιάς κυκλικής ομάδας σε μιά άλλη ομάδα καθορίζεται από την τιμή τού γεννήτορα.
β) Αν η ομάδα B είναι επίσης κυκλική, δείξτε ότι ο ϕ είναι επιμορφισμός εάν και μόνον εάν το $\phi(a)$ είναι γεννήτορας τής B.