# ΑΛΓΕΒΡΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 9

**Πρόβλημα 1.** **α)** Αποδείξτε ότι δύο κυκλικές ομάδες με την ίδια τάξη είναι ισόμορφες.
**β)** Υπολογίστε τα στοιχεία τής ομάδας $(\mathbb{Z}_7^\star, \cdot)$ (δηλ. τής ομάδας των αντιστρέψιμων στοιχείων τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_7$) και αποδείξτε ότι αυτή είναι ισόμορφη με την ομάδα $(\mathbb{Z}_6, +)$. Βρείτε έναν ισομορφισμό.
**γ)** Υπολογίστε τα στοιχεία τής ομάδας $(\mathbb{Z}_{18}^\star, \cdot)$ (δηλ. τής ομάδας των αντιστρέψιμων στοιχείων τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_{18}$) και αποδείξτε ότι αυτή είναι ισόμορφη με την ομάδα $(\mathbb{Z}_6, +)$. Βρείτε έναν ισομορφισμό.

**Πρόβλημα 2.** Αποδείξτε ότι, ενώ οι ομάδες $(6\mathbb{Z}, +)$ και $(3\mathbb{Z}, +)$ είναι ισόμορφες, οι δακτύλιοι $(6\mathbb{Z}, +, \cdot)$ και $(3\mathbb{Z}, +, \cdot)$ δεν είναι. Μάλιστα, ούτε κάν επιμορφισμός δακτυλίων $\phi : 6\mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$ δέν υπάρχει.

**Πρόβλημα 3.** Υπάρχει, μη μηδενικός, ομομορφισμός δακτυλίων από το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων;

**Πρόβλημα 4.** **α)** Αποδείξτε ότι οι μόνοι υποδακτύλιοι τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ είναι οι $n\mathbb{Z}$, $n$ ακέραιος με $n \geq 0$ .
**β)** Έστω $R$ δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο $1_R$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ με $\phi(n) = n\,1_R$ (το $n\,1_R$, $n \in \mathbb{Z}$, ορίζεται με τον γνωστό τρόπο, θεωρώντας το στοιχείο $1_R$ ως στοιχείο τής προσθετικής ομάδας $(R, +)$). Δείξτε ότι ο $\phi$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.
**γ)** Αν ο $\phi$ τού ερωτήματος β) είναι μονομορφισμός δείξτε ότι $n\,1_R \neq 0_R$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αν ο $\phi$ δεν είναι μονομορφισμός δείξτε, με χρήση τού ερώτηματος α), ότι $\mathrm{Ker}\phi = n\mathbb{Z}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το παραπάνω $n$ είναι ο ελάχιστος φυσικός με την ιδιότητα ότι $n\,a = 0_R$ για κάθε $a \in R$.

**Πρόβλημα 5.** Έστω $A = \{\frac{m}{2^n}$, όπου $m \in \mathbb{Z}$, και $n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι το $A$ είναι υποδακτύλιος τού δακτυλίου $\mathbb{Q}$ και βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του (τις μονάδες του).

**Πρόβλημα 6.** Εστω $R$ αντιμεταθετικός δακτύλιος.
**α)** Δείξτε, με επαγωγή, ότι αν $a, b \in R$, τότε για κάθε φυσικό $n$ έχουμε $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i}$.
**β)** Δείξτε ότι αν $a \bmod p$, $b \bmod p \in \mathbb{Z}_p$, όπου $p$ πρώτος αριθμός, τότε $(a \bmod p + b \bmod p)^p = (a \bmod p)^p + (b \bmod p)^p$.

**Πρόβλημα 7.** Έστω $R$ δακτύλιος και $R[x]_0$ το υποσύνολο τού $R[x]$ που περιέχει τα πολυώνυμα με σταθερό όρο μηδέν (δηλ. $a_0 = 0$). Δείξτε ότι το $R[x]_0$ είναι υποδακτύλιος τού $R[x]$.

**Πρόβλημα 8.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα στο $\mathbb{Z}_5[x]$:
**α)** $(-\bar{4} + \bar{1}x + \bar{3}x^2)(\bar{3} - x + \bar{3}x^2)$.

**β)** $(\bar{1} - \bar{2}x^2 + \bar{3}x^6)(\bar{2} + \bar{2}x + \bar{7}x^2)$, όπου με $\bar{a}$ συμβολίζουμε τα στοιχεία τού $\mathbb{Z}_5$.

**Πρόβλημα 9.** Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα $f(x)$ τού $\mathbb{Z}[x]$ που ικανοποιούν την συνθήκη $f(x) = f(-x)$. Ομοίως, να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα τού $\mathbb{Z}_2[x]$ που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη.