ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2012-13
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

***Πρόβλημα 1.** Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και έστω $a \in E$. Αποδείξαμε στο μάθημα ότι αν το a είναι αλγεβρικό στοιχείο $/K$ τότε $K(a) = K[a]$. Δείξτε ότι ισχύει και το αντίστροφο: αν $K(a) = K[a]$ τότε το a είναι αλγεβρικό στοιχείο $/K$.

****Πρόβλημα 2. α)** Δείξτε ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
β) Βρείτε τον βαθμό τής επέκτασης $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.

****Πρόβλημα 3.** Δείξτε ότι τα παρακάτω σύνολα είναι ιδεώδη τού αντιστοίχου δακτυλίου πολυωνύμων και εκφράστε τα στην μορφή $< f(x) >$.
α) $A = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x], \;\; f(i) = 0\}$.
β) $B = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x], \;\; f(\sqrt{2}) = 0\}$.
γ) $C = \{f(x) \in \mathbb{R}[x], \;\; f(\sqrt{2}) = 0\}$.

***Πρόβλημα 4.** Έστω $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi, \;\; a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ και $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi, \;\; a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$.
α) Δείξτε ότι το $\mathbb{Z}[i]$ είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{C}$ και ότι το $\mathbb{Q}[i]$ είναι υπόσωμα τού $\mathbb{C}$.
β) Δείξτε ότι σώμα $\mathbb{Q}[i]$ είναι το μικρότερο υπόσωμα τού $\mathbb{C}$ που περιέχει τον δακτύλιο $\mathbb{Z}[i]$.

****Πρόβλημα 5.** Έστω K σώμα. Δείξτε ότι ο δακτύλιος $K[x]$ έχει άπειρα ανάγωγα πολυώνυμα.

****Πρόβλημα 6.** Έστω p πρώτος. Στο μάθημα είδαμε ότι το πολυώνυμο $x^{p-1} + \cdots x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1} \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο. Δείξτε ότι και το πολυώνυμο $\frac{x^{p^2} - 1}{x^p - 1} \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο.

****Πρόβλημα 7.** Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και $a \in E$. Στο μάθημα είδαμε ότι $K[a] = \mathrm{Im}\phi_a$, όπου $\phi_a : K[x] \longrightarrow E$ με $\phi_a(f) = f(a)$.
α) Έστω $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$ οι τέσσερεις ρίζες τής εξίσωσης $x^4 - 2 = 0$. Δείξτε ότι $\mathbb{Q}[a_i] \cong \mathbb{Q}[a_j]$, για κάθε $1 \leq i, j, \leq 4$.
β) Ισχύει το ίδιο για τα $\mathbb{R}[a_i]$;

***Πρόβλημα 8. α)** Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^3 + 2x + 2$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $\mathbb{Q}[x]$.
β) Ως πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια πραγματική ρίζα, έστω a. Εκφράστε το $\frac{1}{1-a}$ ως στοιχείο τού $\mathbb{Q}[a]$.

***Πρόβλημα 9.** Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και $a \in E$. Εστω $f(x) \in K[x]$ ένα μή σταθερό πολυώνυμο. Θέτουμε $b = f(a)$. Έχουμε ότι $K \leq K(b) \leq E$. Δείξτε ότι το a είναι αλγεβρικό πάνω από το σώμα $K(b)$.

****Πρόβλημα 10.** Έστω $K \leq E$ επέκταση σωμάτων και $a \in E$ αλγεβρικό στοιχείο πάνω από το K. Υποθέτουμε ότι το $\mathrm{Irr}(a, K)$ είναι περιττού βαθμού. Δείξτε ότι $K(a) = K(a^2)$. Ισχύει το ίδιο όταν ο βαθμός είναι άρτιος;

***Πρόβλημα 11.** Έστω $K \leq E$ μια αλγεβρική επέκταση σωμάτων. Δείξτε ότι κάθε υποδακτύλιος τού E που περιέχει το K είναι σώμα. Ισχύει το ίδιο αν η επέκταση δεν είναι αλγεβρική;

****Πρόβλημα 12.** Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^n + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ είναι ανάγωγο αν και μόνον αν $n = 2^k$ για κάποιον ακέραιο $k \geq 0$.