

ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2012-13
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

***Πρόβλημα 1.** Έστω p πρώτος αριθμός. Βρείτε ένα σώμα ανάλυσης E τού πολυωνύμου $x^p - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ και δείξτε ότι $[E : \mathbb{Q}] = p(p - 1)$.

***Πρόβλημα 2.** Δείξτε ότι αν E σώμα ανάλυσης ενός πολυωνύμου τού $\mathbb{Q}[x]$ βαθμού 3 τότε $[E : \mathbb{Q}] = 1, 2, 3, 6$. Δώστε παραδείγματα για κάθε περίπτωση.

****Πρόβλημα 3.** Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Συμβολίζουμε ως a μία ρίζα τού $f(x)$ σε μία αλγεβρική θήκη $\overline{\mathbb{Z}}_3$ τού \mathbb{Z}_3 . Δείξτε ότι το $\mathbb{Z}_3(a)$ είναι σώμα ανάλυσης τού πολυωνύμου $x^4 + x^3 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$.

****Πρόβλημα 4.** Έστω K σώμα χαρακτηριστικής $p \neq 0$ και έστω $f(x) \in K[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο .

α) Δείξτε ότι $f(x) = g(x^{p^e})$, $e \geq 0$, όπου $g(x)$ ανάγωγο διαχωρίσιμο πολυώνυμο τού $K[x]$.

β) Δείξτε ότι κάθε ρίζα τού $f(x)$ σε κάποια θήκη τού αλγεβρική τού K έχει (την ίδια) πολλαπλότητα p^e .

***Πρόβλημα 5.** Έστω K σώμα με $\text{char}K = p$, $p =$ πρώτος και $a \in K$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^{p^n} - a \in k[x]$ (n θετικός ακέραιος) είναι ανάγωγο εάν και μόνον εάν το a δεν έχει p -ρίζα στο K .

***Πρόβλημα 6.** Έστω K σώμα με $\text{char}K = p$, $p =$ πρώτος και έστω ότι ο βαθμός τής επέκτασης $K \leq L$ είναι πρώτος προς τον p . Δείξτε ότι η επέκταση είναι διαχωρίσιμη.

***Πρόβλημα 7.** Έστω E το σώμα ριζών τού $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο τής απόδειξης τού θεωρήματος τού πρωταρχικού στοιχείου, βρείτε έναν μιγαδικό c με $E = \mathbb{Q}(c)$.

****Πρόβλημα 8.** Έστω $K = \mathbb{Z}_p(x, y)$ το σώμα των ρητών συναρτήσεων μεταβλητών x, y με συντελεστές στο σώμα \mathbb{Z}_p ($p =$ πρώτος). Έστω $g(t) = t^p - x$, $h(t) = t^p - y \in K[t]$ και ορίζουμε ως E το σώμα ανάλυσης τού πολυωνύμου $f(t) = g(t)h(t) \in K[t]$. Δείξτε ότι:

α) Τα $g(t)$ και $h(t)$ είναι ανάγωγα πολυώνυμα τού $K[t]$.

β) $[E : K] = p^2$.

γ) Η επέκταση $K \leq E$ δεν είναι διαχωρίσιμη.

δ) $a^p \in K$ για κάθε $a \in E$.