ΑΛΓΕΒΡΑ II-ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ, ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜ. 2012-13
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #4 - για την Τρίτη 20/11/2012

***Πρόβλημα 1.** **α)** Έστω $K \leq F$ επέκταση σωμάτων με $[F : K] = 2$. Δείξτε ότι η επέκταση είναι κανονική.
β) Έστω $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ πολυώνυμο περιττού βαθμού ≥ 3 το οποίο έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα $a \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι η επέκταση $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(a)$ δεν είναι κανονική.

****Πρόβλημα 2.** Έστω $K \leq F$ μια κανονική επέκταση σωμάτων και $f(x) \in K[x]$ ανάγωγο πολυώνυμο τού $K[x]$. Αν το $f(x)$ δεν είναι ανάγωγο ως πολυώνυμο τού $F[x]$ δείξτε ότι όλοι οι παράγοντες τής ανάλυσής του σε ανάγωγα είναι πολυώνυμα τού ιδίου βαθμού.

****Πρόβλημα 3.** Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $a^4 = 5$. Δείξτε ότι:
α) Το $\mathbb{Q}(ia^2)$ είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}$.
β) Το $\mathbb{Q}(a + ia)$ είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}(ia^2)$.
γ) Το $\mathbb{Q}(a + ia)$ δεν είναι κανονική επέκταση τού $\mathbb{Q}$.

***Πρόβλημα 4.** **α)** Δείξτε ότι κάθε στοιχείο τού F_{2^n} είναι το τετράγωνο κάποιου στοιχείου του.
β) Δείξτε ότι $F_{2^2} = \mathbb{Z}_2(a)$, όπου το $a \in F_{2^2}$ είναι βαθμού 2 πάνω από το $\mathbb{Z}_2$

****Πρόβλημα 5.** Είδαμε στο μάθημα ότι η επέκταση $\mathbb{Z}_p \leq F_{p^n}$ είναι κανονική. Επομένως αν $a \in F_{p^n}$ το $\mathrm{Irr}(a, \mathbb{Z}_p)$ αναλύεται πάνω από το F_{p^n}. Βρείτε την ανάλυση τού $\mathrm{Irr}(a, \mathbb{Z}_p)$ ως έκφραση δυνάμεων τού a.

****Πρόβλημα 6.** Έστω p περιττός πρώτος και $F = F_{p^n}$ το πεπερασμένο σώμα με p^n στοιχεία.
α) Δείξτε ότι το σύνολο $F^2 = \{a^2, a \in F\}$ έχει $\frac{p^n+1}{2}$ στοιχεία. Συμπεράνατε ότι, αν $t \in F$ τότε και το σύνολο $t - F^2 = \{t - a^2, a \in F\}$ έχει $\frac{p^n+1}{2}$ στοιχεία.
β) Για $t \in F$ δείξτε ότι το σύνολο $F^2 \cap (t - F^2)$ είναι μή κενό και συμπεράνατε ότι κάθε στοιχείο c τού F γράφεται στην μορφή $c = a^2 + b^2$, $a, b \in F$.
γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ έχει μή τετριμμένη λύση στο F (τετριμμένη λύση είναι η $x = y = z = 0$).

***Πρόβλημα 7.** **α)** Έστω $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο σώμα $\mathbb{F}_{p^n}$ στο οποίο το $f(x)$ αναλύεται.
β) Αν, επιπλέον, το $f(x)$ είναι διαχωρίσιμο δείξτε ότι $f(x) \mid x^{p^n} - x$.

****Πρόβλημα 8.** **α)** Έστω $\mathbb{F}_{p^m}$ και $\mathbb{F}_{p^n}$ τα υποσώματα τού $\overline{\mathbb{Z}}_p$ με p^n και p^m στοιχεία αντίστοιχα. Βρείτε το σώμα $\mathbb{F}_{p^m} \cap \mathbb{F}_{p^n}$.

***Πρόβλημα 9.** Έστω $n \mid m$ και θεωρείστε την επέκταση $\mathbb{F}_{p^n} \leq \mathbb{F}_{p^m}$. Βρείτε την ομάδα $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_{p^n})$.